ORSAY
n° d'ordre : 2732

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le grade de DOCTEUR d'ÉTAT

Spécialité : Sciences Mathématiques

PAR

Gérard LAUMON

SUJET : Caractéristiques d'Euler-Poincaré et sommes exponentielles

soutenue le mercredi 15 juin 1983 devant la Commission d'examen

MM. P. DELIGNE Président

M. DUFLO

L. ILLUSIE

M. RAYNAUD

J.L. VERDIER

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Code matière AMS : 10 G, 14 F,
58 G, 18 A

Mots clés : cohomologie étale, ramification (des faisceaux), Euler-Poincaré (caractéristiques d'), sommes exponentielles, Fourier (transformation de), $\mathcal{D}$-Modules, catégorie dérivée filtrée

ORSAY
n° d'ordre : 2732

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le grade de DOCTEUR d'ÉTAT

Spécialité : Sciences Mathématiques

PAR

Gérard LAUMON

SUJET : Caractéristiques d'Euler-Poincaré et sommes exponentielles

soutenue le mercredi 15 juin 1983 devant la Commission d'examen

MM. P. DELIGNE Président

M. DUFLO

L. ILLUSIE

M. RAYNAUD

J.L. VERDIER

ABSTRACT :

The articles comprising this thesis are devoted to the study of certain aspects of the ramification of constructible sheaves on algebraic varieties, in relation with calculations of Euler-Poincaré characteristics and with estimates of trigonometric sums. We work in some instances with ℓ-adic sheaves in characteristic $p > 0$ and in others with $\mathcal{D}$-Modules in characteristic 0 .

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ici toute ma gratitude envers Luc Illusie qui a guidé mes premiers pas dans la recherche et dirigé cette thèse. Il est impossible de résumer en quelques phrases tout ce que je lui dois. Tant par ses cours de troisième cycle à Orsay que par les sujets de recherche qu'il m'a proposés, il a su m'intéresser à la géométrie algébrique. Il m'a sans cesse prodigué conseils et encouragements et s'est toujours montré prêt à répondre à mes questions. Il a apporté de nombreuses améliorations à ce travail en lisant et relisant avec beaucoup de patience mes ébauches de rédaction.

Mes remerciements les plus chaleureux vont aussi tout naturellement à Pierre Deligne qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Son influence sur tout ce qui touche à la géométrie algébrique est évidente et ce travail n'y fait pas exception. Je le remercie pour les longs et fructueux entretiens qu'il m'a accordés avec beaucoup de gentillesse et d'indulgence.

La collaboration avec Nicholas M. Katz m'a été particulièrement profitable et agréable. La rédaction de son cours de 1979 à Orsay m'a beaucoup appris et m'a ouvert de nouvelles voies de recherche. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Michel Raynaud et Jean-Louis Verdier pour leur aide et leurs conseils si précieux et je les remercie également d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Michel Duflo de m'avoir proposé un second sujet et d'avoir accepté de le diriger.

Ce travail a été réalisé au département de mathématiques d'Orsay dont je voudrais remercier tous les membres et, plus particulièrement, mes collègues d'enseignement.

Je remercie aussi avec grand plaisir les participants des séminaires de géométrie algébrique d'Orsay, de géométrie analytique de l'E.N.S., des séminaires sur les singularités de l'Ecole Polytechnique et sur les groupes réductifs et les formes automorphes de Jussieu : j'ai souvent eu avec eux de passionnantes discussions.

Je voudrais enfin exprimer toute ma reconnaissance à Mme Bonnardel qui a réalisé avec diligence et beaucoup de soin la frappe du manuscrit.

Sommaire

pages

1. Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface, texte d'une conférence au Colloque de Luminy de juillet 1981, "Analyse et topologie sur les espaces singuliers", à paraître dans Astérisque..... 5

2. Compléments à "Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface"..... 21

3. Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique, Note aux C. R. Acad. Sciences Paris, t. 292 (19 janvier 1981), série I, p. 209-212..... 53

4. Majoration de sommes exponentielles attachées aux hypersurfaces diagonales, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., série, t. 1983..... 57

5. Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-Modules filtrés, texte d'une conférence au Colloque Franco-Japonais de Tokyo-Kyoto d'octobre 1982, à paraître aux Lecture Notes..... 139

6. Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles (en collaboration avec N.M. Katz), prépublication du Département de Mathématiques de l'Université Paris XI, 1983..... 227

Introduction

Les articles réunis dans cette thèse étudient certains aspects de la ramification des faisceaux constructibles sur les variétés algébriques, en liaison avec des calculs de caractéristiques d'Euler-Poincaré et d'estimations de sommes trigonométriques. Nous travaillons d'une part, en caractéristique $p \geqslant 0$, avec des faisceaux ℓ-adiques (cf. les articles [1], [2], [3], [4] et [6]) et, d'autre part, en caractéristique 0, avec des $\mathcal{D}$-Modules (cf. [5] et [6]).

L'article [1], complété par [2], généralise au cas des surfaces la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič. Si U est un ouvert dense d'une variété propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$ et si $\mathcal{F}$ est un système local ℓ-adique sur U $(\ell \neq p)$, la formule

$$\chi(U,\mathcal{F}) = \chi(U)\mathrm{rang}(\mathcal{F}) ,$$

qui relie, pour $p = 0$, la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$ à celle de U et au rang de $\mathcal{F}$, n'est pas vérifiée en général pour $p > 0$, la différence Δ entre les deux membres de l'égalité ci-dessus étant alors liée à la ramification sauvage de $\mathcal{F}$ le long de $X-U$. Pour X une surface et modulo certaines restrictions sur la ramification de $\mathcal{F}$ le long de $X-U$, nous exprimons le terme correctif Δ comme somme de termes locaux le long de $X-U$, du type conducteurs de Swan. Suivant un canevas de Deligne, nous fibrons la surface par un pinceau de courbes ; le point le plus délicat est le théorème d'homotopie 6.1.4.

La note [3] contient une démonstration de l'égalité des caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ordinaire et en cohomologie à supports propres pour un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur un schéma séparé et de type fini sur un corps algébriquement clos. Cette égalité avait été démontrée par Grothendieck pour les courbes en toute caractéristique, et en toute dimension, en caractéristique nulle. Signalons que Gabber, utilisant la méthode proposée ici, a obtenu, ultérieurement, une variante de ce résultat pour un schéma de type fini sur un schéma régulier de dimension 1 (non publié).

L'article [4] répond à une question posée par Hooley et que m'a transmise Katz. Nous obtenons en particulier le résultat suivant.

Considérons la somme trigonométrique

$$S(p) = \sum_{1+y_1^{d_1}+\ldots+y_m^{d_m}=0} e^{\frac{2\pi i}{p}(a_1y_1+\ldots+a_my_m)} \qquad (y_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

où $m, d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}^\times$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ et p est un nombre premier. Supposons que les a_i sont non tous nuls, que p est premier à tous les d_i $(i = 1, \ldots, m)$ et que

$$1 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_m .$$

Alors on a l'estimation

$$|S(p)| \leqslant d_1(d_2-1)\ldots(d_m-1)\,(\sqrt{p})^{m-1} .$$

Nous établissons ce résultat par voie ℓ-adique, en suivant la méthode exposée par Deligne dans SGA 4½ [Sommes trig.]. La difficulté principale vient de l'absence de compactification lisse, suffisamment maniable, de l'hypersurface diagonale d'équation $1 + y_1^{d_1} + \ldots + y_m^{d_m} = 0$.

Les résultats contenus dans l'article [5] ne sont pas à proprement parler nouveaux, seul le point de vue adopté présente quelque originalité. On se place dans le cadre algébrique (en caractéristique 0) et on montre comment une bonne notion de catégorie dérivée pour les $\mathcal{D}$-Modules filtrés ramène à des énoncés classiques de finitude pour les $\mathcal{O}$-Modules le théorème de Kashiwara sur la cohérence des images directes d'un $\mathcal{D}$-Module cohérent par un morphisme propre. On obtient en prime un théorème de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-Modules qui contient notamment la formule de l'indice global de Dubson-Kashiwara.

Un certain nombre de sommes trigonométriques, liées à la géométrie algébrique sur un corps fini, ont en commun une propriété remarquable : elles admettent une estimation dont l'ordre de grandeur est la racine carrée de l'estimation triviale (par exemple, les sommes $S(p)$ considérées plus haut admettent l'estimation $|S(p)| = O((\sqrt{p})^{m-1})$, alors que l'estimation triviale, qui consiste à majorer chaque exponentielle par 1 est $|S(p)| = O(p^{m-1})$) ; ce phénomène est lié à une propriété de pureté de la cohomologie ℓ-adique associée à ces sommes exponentielles. Dans l'article [6], nous dégageons, avec N.M. Katz, une classe, suffisamment vaste pour

englober tous les exemples connus, de sommes trigonométriques possédant cette propriété de pureté géométrique. Pour cela nous faisons appel aux variantes "faisceautiques" de la transformation de Fourier aussi bien en caractéristique 0 pour les $\mathcal{D}$-Modules qu'en caractéristique $p > 0$ pour les faisceaux ℓ-adiques.

CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ

DES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES SUR UNE SURFACE

CARACTERISTIQUE D'EULER-POINCARE DES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES SUR UNE SURFACE

par

Gérard LAUMON (Orsay*)

-:-:-

Le point de départ de ce travail est une lettre de Deligne à Illusie [1] où Deligne énonce les résultats principaux de cet exposé et en indique une méthode de démonstration.

Je tiens à remercier Illusie qui m'a signalé ce problème et qui a dirigé avec beaucoup de patience ce travail. Je tiens aussi à remercier Deligne et Gabber qui m'ont aidé à résoudre de nombreuses difficultés.

Les détails des démonstrations de cet exposé seront publiés ultérieurement.

1. Introduction.

1.0. Soit X une courbe connexe, projective et lisse sur un corps k algébriquement clos, soient U un ouvert dense de X, $\mathbb{F}_\lambda$ un corps fini de caractéristique inversible dans k et $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U. Alors, la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) \overset{\text{dfn}}{=} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_\lambda} H^i_c(U,\mathcal{F}) \tag{1.0.1}$$

se calcule par la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic [4]

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) = \chi_c(U)\,\mathrm{rang}(\mathcal{F}) - \sum_{x\in X-U} Sw_x(\mathcal{F}) \tag{1.0.2}$$

où, pour $x\in X-U$, $Sw_x(\mathcal{F})$ est un entier, appelé conducteur de

---

* Equipe de recherche associée au C.N.R.S. n°653.

Swan de $\mathcal{F}$ en x, qui mesure la ramification sauvage de $\mathcal{F}$ en x ; en particulier, $\mathcal{F}$ est modérément ramifié en x (condition automatiquement vérifiée si k est de caractéristique nulle) si et seulement si $Sw_x(\mathcal{F}) = 0$.

1.1. Soit maintenant X une surface connexe, normale, projective sur le corps k, soient U un ouvert dense de X et $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U(k et $\mathbb{F}_\lambda$ étant comme en 1.0). Alors on s'attend à une formule du type

(1.1.1) $\chi_c(U,\mathcal{F}) = \chi_c(U)\text{rang}(\mathcal{F}) + \Sigma$(termes dépendant de la ramification de $\mathcal{F}$ le long de X-U) .

Ceci nous amène à étudier la ramification de $\mathcal{F}$ le long de X-U. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ la famille des composantes irréductibles de Y=X-U qui sont de codimension 1 dans X. Pour chaque $i\in I$, notons δ_i le point générique de Y_i et $X_{(\delta_i)}$ l'hensélisé de X en δ_i.Deux types de ramification de $\mathcal{F}$ en δ_i sont possibles : soit il existe une extension finie du trait $X_{(\delta_i)}$ ayant une extension résiduelle séparable et qui trivialise le faisceau $\mathcal{F}|Ux_X X_{(\delta_i)}$, soit toute extension finie du trait $X_{(\delta_i)}$ qui trivialise le faisceau $\mathcal{F}|Ux_X X_{(\delta_i)}$ a une extension résiduelle non séparable. Dans le premier cas, nous dirons que le faisceau $\mathcal{F}$ est <u>non férocement ramifié le long de</u> Y_i et,dans le second cas, que le faisceau $\mathcal{F}$ est <u>férocement ramifié le long de</u> Y_i.

1.2. Nous ne traiterons dans cet exposé que du cas non féroce. Dans ce cas, pour chaque $i\in I$, il existe un ouvert dense Y_i^0 de Y_i et un entier $Sw_i(\mathcal{F})$ (cf. 2.2) ayant la propriété suivante : si C est un germe de courbe tracée sur X et transverse à Y en un point x de Y_i^0 , alors le conducteur de Swan en x du faisceau $\mathcal{F}|Ux_X C$ est égal à $Sw_i(\mathcal{F})$. Le résultat principal de cet exposé est le

suivant :

Théorème 1.2.1. Pour chaque point fermé x de X, on peut définir un entier $Sw_x(\mathcal{F})$ qui ne dépend que du germe de $\mathcal{F}$ en x, i.e. du faisceau $\mathcal{F}|Ux_X X_{(x)}$ où $X_{(x)}$ est l'hensélisé de X en x, et ayant les propriétés suivantes :

(i) si $x \in U$, $Sw_x(\mathcal{F}) = 0$

(ii) si $x \in Y_i^\circ$ pour un $i \in I$, $Sw_x(\mathcal{F}) = -Sw_i(\mathcal{F})$,

(iii) si l'on pose $Y^\circ = \bigcup_{i \in I} Y_i^\circ$, on a

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) = \chi_c(U)\,\mathrm{rang}(\mathcal{F}) - \sum_{i \in I} \chi_c(Y_i^\circ) Sw_i(\mathcal{F}) + \sum_{x \in Y - Y^\circ} Sw_x(\mathcal{F}). \qquad (1.2.1.1)$$

2. Définition des entiers $Sw_i(\mathcal{F})$ et $Sw_x(\mathcal{F})$.

2.1. Pour chaque $i \in I$, notons A_i l'anneau de valuation discrète hensélien tel que $X_{(\delta_i)} = \mathrm{Spec}(A_i)$, notons K_i le corps des fractions de A_i, de sorte que $Ux_X X_{(\delta_i)} = \mathrm{Spec}(K_i)$, et fixons une clôture séparable K_i^{sep} de K_i. Un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $\mathrm{Spec}(K_i)$ n'est autre qu'un $\mathbb{F}_\lambda[\mathrm{Gal}(K_i^{sep}/K_i)]$-module fini ; notons M_i le $\mathbb{F}_\lambda[\mathrm{Gal}(K_i^{sep}/K_i)]$-module fini correspondant à $\mathcal{F}|Ux_X X_{(\delta_i)}$ et $\rho_i : \mathrm{Gal}(K_i^{sep}/K_i) \to GL(M_i)$ la représentation galoisienne associée. Le noyau de ρ_i est de la forme $\mathrm{Gal}(K_i^{sep}/L_i)$ où L_i est une sous-extension de K_i^{sep}/K_i finie galoisienne. Alors dire que $\mathcal{F}$ est non-férocement ramifié le long de Y_i revient à dire que l'extension résiduelle de L_i/K_i (relativement à l'anneau de valuation discrète A_i) est séparable. Par définition $Sw_i(\mathcal{F})$ sera le conducteur de Swan du $\mathbb{F}_\lambda[\mathrm{Gal}(L_i/K_i)]$-module fini M_i (cf. [6] 19.3).

2.2. On définit maintenant, pour chaque $i \in I$, l'ouvert dense Y_i° de Y_i de la façon suivante : on commence par considérer l'ouvert dense $Y_i^{\circ\circ}$ de Y_i formé des points x de Y_i en lesquels (X,Y) est un k-couple lisse ; si l'on fait passer par un point x de $Y_i^{\circ\circ}$ un germe de courbe C transverse à Y_i en x, le conducteur de Swan, $Sw_x(\mathcal{F}|C)$, du faisceau

$\mathcal{F}|U_{x_X}C$ en x est bien défini et il existe un ouvert dense Y_i° de $Y_i^{\circ\circ}$ tel que $Sw_x(\mathcal{F}|C) = Sw_i(\mathcal{F})$ pour tout $x\in Y_i^\circ$ et tout germe de courbe C transverse à Y en x.

Exemple 2.2.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p>0$, $X=Spec(k[x,y])$, $U=X[1/y]$, $Y=X-U$, n un entier strictement positif, $\psi:\mathbb{F}_p\to\mathbb{F}_\lambda^*$ un caractère additif non trivial et $\mathcal{F}=\mathcal{L}(\psi,x/y^n)$ le faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U obtenu à partir du $\mathbb{F}_p$-torseur d'Artin-Schreier d'équation $t^p-t=x/y^n$ par extension du groupe structural de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}_\lambda^*$ via ψ^{-1}. Notons $A=k(x)\{y\}$ l'hensélisé de $k[x,y]$ au point générique de Y, K son corps des fractions, $L=K[t]/(t^p-t-x/y^n)$ et B le normalisé de A dans L ; alors L/K est une extension galoisienne de groupe de Galois $\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{F}|Spec(K)$ est le faisceau associé à la représentation galoisienne $\psi^{-1}:Gal(L/K)=\mathbb{F}_p\to\mathbb{F}_\lambda^*=GL(1,\mathbb{F}_\lambda)$; cette représentation est fidèle (ψ est non trivial), donc $\mathcal{F}$ est non férocement ramifié le long de Y si et seulement si l'extension résiduelle de B/A est séparable.

Montrons que $\mathcal{F}$ est non férocement ramifié le long de Y si et seulement si n est premier à p. Pour cela, notons $v:L-\{0\}\to\mathbb{Q}$ la valuation de B normalisée par $v(y)=1$, e l'indice de ramification de B/A et f le degré de l'extension résiduelle ;on a $v(L-\{0\}) = \mathbb{Z}[1/e]$ et $e.f = p$. Comme $t^p-t = x/y^n$, on a $v(t) = -n/p$. Si $(n,p)=1$, $v(t)\notin\mathbb{Z}$ et $e=p$, $f=1$, donc $\mathcal{F}$ est non férocement ramifié le long de Y. Si $n=m.p$, avec $m\in\mathbb{N}$, alors $v(ty^m)=0$ et $v(ty^n)>0$, donc, si on réduit la relation $(ty^m)^p-ty^n=x$ modulo l'idéal maximal de B, on voit que x admet une racine p-ième dans le corps résiduel de B ; comme x n'admet pas de racine p-ième dans k(x), l'extension résiduelle de B/A est non triviale et purement inséparable, donc $\mathcal{F}$ est férocement ramifié le long de Y.

Supposons maintenant $(n,p)=1$ de sorte que l'on est dans le cas non féroce, alors le conducteur de Swan de $\mathcal{F}$ au point générique de Y, $Sw_Y(\mathcal{F})$, est égal à n (cf. [7]4.4).

Si C est le germe de courbe d'équation $x=\phi(y)$, où $\phi(y)\in k[[y]]$, on a $Sw_{(\phi(0),0)}(\mathcal{F}|C) = n$ si $\phi(0)\neq 0$ et $Sw_{(0,0)}(\mathcal{F}|C) < n$ si $\phi(0)=0$, donc $Y^\circ = Y-\{(0,0)\}$.

2.3. Pour tout point fermé x de X, nous appellerons projection locale en x tout k-morphisme $f:X_{(x)} \to \mathbb{A}^1_k$ tel que $f(x)=0$ ($X_{(x)}$ désignant l'hensélisé de X en x). On dira qu'une projection locale f en x est bonne si f est essentiellement lisse en dehors de x et si $f|Y\times_X X_{(x)} \to (\mathbb{A}^1_k)_{(0)}$ est fini étale en dehors de x.

Choisissons un clôture séparable du corps des fractions de l'hensélisé de $\mathbb{A}^1_k$ en 0 et notons I le groupe d'inertie du trait $(\mathbb{A}^1_k)_{(0)}$ correspondant à cette clôture séparable. A toute projection locale en x, $f:X_{(x)} \to A^1_k$, on peut associer alors un foncteur, dit foncteur "cycles évanescents" (cf. [2]),

$$(2.3.1) \qquad R\Psi(-,f)_x : D^b_c(X,\mathbb{F}_\lambda) \to D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$$

où $D^b_c(X,\mathbb{F}_\lambda)$ est la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur X à cohomologie bornée constructible et où $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$ est la catégorie dérivée des complexes de $\mathbb{F}_\lambda[I]$-modules à cohomologie bornée et de dimension finie sur $\mathbb{F}_\lambda$. En passant aux groupes de Grothendieck de ces catégories on a donc un homomorphisme

$$(2.3.2) \qquad \Psi(-,f)_x : K^b_c(X,\mathbb{F}_\lambda) \to K^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I]).$$

D'autre part, si V est un $\mathbb{F}_\lambda[I]$-module fini, on pose

$$(2.3.3) \qquad dimtot(V) = \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(V) + Sw(V)$$

où le conducteur de Swan, Sw(V), est défini de la même façon qu'en 2.1. La fonction dimtot(-) est additive donc fournit un homomrphisme de groupes

$$(2.3.4) \qquad dimtot(-) : K^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I]) \to \mathbb{Z}$$

Définition 2.3.5. Pour tout point fermé x de X et pour toute bonne projection locale f en x, on pose

$$(2.3.5.1) \qquad Sw_x(\mathcal{F},f) = -dimtot\,[\Psi(F,f)_x]$$

où $F \in K_c^b(X, \mathbb{F}_\lambda)$ est le faisceau virtuel défini par

(2.3.5.2) $$F = [u_!\mathcal{F}]\text{-rang}(\mathcal{F}).[\mathbb{F}_{\lambda,U}] + \sum_{i\in I} Sw_i(\mathcal{F}).[\mathbb{F}_{\lambda,Y_i^o}],$$

$u:U \to X$ désignant l'inclusion et $\mathbb{F}_{\lambda,Z}$ désignant le faisceau constant $\mathbb{F}_\lambda$ sur Z prolongé par 0 à X tout entier, pour toute partie localement fermée Z de X.

Théorème 2.3.6. Pour tout point fermé x de X, $Sw_x(\mathcal{F},f)$ est indépendant de la bonne projection locale en x choisie.

Définition 2.3.7. Pour tout point fermé x de X, $Sw_x(\mathcal{F})$ sera la valeur commune des $Sw_x(\mathcal{F},f)$ pour f parcourant les bonnes projections locales en x.

Exemples 2.3.8 . a) Si $X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$, $x = (x_1,x_2)$ où X_1, X_2 sont deux courbes lisses sur k et où $\mathcal{F}_i$ est un faisceau constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels localement constant sur $X_i - \{x_i\}$ (i=1,2), alors

$$Sw_x(\mathcal{F}) = Sw_{x_1}(\mathcal{F}_1).Sw_{x_2}(\mathcal{F}_2).$$

b)Si $\mathcal{F}$ est modérément ramifié au point x de Y, au sens où les pro-p-groupes de $\pi_1(Ux_XX_{(x)},t)$ agissent trivalement sur $\mathcal{F}_t$ pour tout point géométrique t de $Ux_XX_{(x)}$, alors $Sw_x(\mathcal{F})=0$.

c) Si $f(x,y) \in k[x,y]$ présente en (0,0) une singularité isolée et si dans la résolution de cette singularité les multiplicités qui apparaissent sont inversibles dans k, on a, pour tout caractère additif non trivial $\psi:\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_\lambda^*$,

$$Sw_{(0,0)}(\mathcal{L}(\psi,1/f(x,y))) = 1-\mu_{(0,0)}(f)$$

où $\mathcal{L}(\psi,1/f(x,y))$ est le faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $U=\text{Spec}(k[x,y,1/f(x,y)])$ obtenu à partir du $\mathbb{F}_p$-torseur d'Artin-Schreier d'équation $t^p-t = 1/f(x,y)$ par extension du groups structural de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}_\lambda$ via ψ^{-1}.

3. Principe de la méthode des pinceaux.

3.1. Fibrons la surface par un pinceau d'hyperplans relativement à un plongement projectif de X arbitraire pour l'instant. On choisit le pinceau de telle sorte que son axe ne rencontre pas Y, ni le lieu singulier de X et soit transverse à X. Notons

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^1_k & & \end{array} \qquad (3.1.1)$$

la variété d'incidence du pinceau et $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1_k$ l'application rationnelle donnée par le pinceau et définie en dehors de l'axe.

Pour prouver (1.2.1.1), on doit montrer que $\chi(X,F)$ (pour F défini en (2.3.5.2)) est somme des $Sw_x(\mathcal{K})$ pour x parcourant Y-Y°. Pour cela on va calculer $\chi(X,F)$ à l'aide du pinceau. On vérifie sans peine que

$$\chi(X,F) = \chi(X,\pi^*F) \qquad (3.1.2)$$

et, compte-tenu de la suite spectrale de Leray pour f, on a

$$\chi(X,\pi^*F) = \chi(\mathbb{P}^1_k, f_*\pi^*F). \qquad (3.1.3)$$

Or, par la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic [4], on a

$$\chi(\mathbb{P}^1_k, f_*\pi^*F) = \chi(\mathbb{P}^1_k)\chi(f^{-1}(\bar{\eta}),\pi^*F) - \sum_{t\in\mathbb{P}^1_k(k)} a_t(f_*\pi^*F), \qquad (3.1.4)$$

avec les notations suivantes : $\bar{\eta}$ est un point géométrique générique de $\mathbb{P}^1_k$, pour tout faisceau constructible $\mathcal{G}$ de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $\mathbb{P}^1_k$ et pour tout $t\in\mathbb{P}^1_k(k)$, on pose

$$a_t(\mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(\mathcal{G}_{\bar{\eta}}) + Sw_t(\mathcal{G}) - \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(\mathcal{G}_t) \qquad (3.1.5)$$

et l'on étend a_t par additivité à $K^b_c(\mathbb{P}^1_k, \mathbb{F}_\lambda)$. La formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic entraine d'autre part :

$$\chi(f^{-1}(\bar{\eta}),\pi^*F) = 0. \qquad (3.1.6)$$

Par suite, on a :

$$(3.1.7) \qquad \chi(X,F) = -\sum_{t\in \mathbb{P}^1_k(k)} a_t(\tilde{f}_*\pi^*F).$$

La théorie des cycles évanescents [2], relativement à chaque trait $(\mathbb{P}^1_k)_{(t)}$, $t\in\mathbb{P}^1_k(k)$, permet de localiser le second membre de (3.1.7) aux points de non locale acyclicité du triplet $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$. Plus précisément, si l'on peut choisir le pinceau de telle sorte que l'ensemble des points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$ soit fini, alors la théorie des cycles évanescents relativement au trait $(\mathbb{P}^1_k)_{(t)}$ permet d'expliciter $a_t(\tilde{f}_*\pi^*F)$ sous la forme

$$(3.1.8) \qquad a_t(\tilde{f}_*\pi^*F) = \sum_{\substack{\tilde{x}\in\tilde{X}(k)\\ \tilde{f}(\tilde{x})=t}} \mathrm{dimtot}[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}],$$

où l'on a posé

$$(3.1.9) \qquad \Phi(-,\tilde{f})_{\tilde{x}} = \Psi(-,\tilde{f})_{\tilde{x}} - (-)_{\tilde{x}}$$

dans $\mathrm{Hom}(K^b_c(\tilde{X},\mathbb{F}_\lambda),K^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I]))$, I désignant le groupe d'inertie du trait $(\mathbb{P}^1_k)_{(t)}$ et Ψ, dimtot ayant la même signification qu'en 2.3. Donc, si l'on peut choisir le pinceau de telle sorte que l'ensemble des points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$ soit fini, on peut réécrire (3.1.7) sous la forme

$$(3.1.10) \qquad \chi(X,F) = -\sum_{\tilde{x}\in\tilde{X}} \mathrm{dimtot}[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}],$$

où le second membre est en fait une somme finie indexée par les points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$.

3.2. Choisissons maintenant le pinceau de telle sorte que :

a) son axe ne rencontre ni Y, ni le lieu singulier de X et soit transverse à X,

b) sa fibre générale ne rencontre pas le lieu singulier de X, ni Y-Y° et soit transverse à X et à Y,

c) chacune de ses fibres soit génériquement transverse à X.

Alors, il n'y a qu'un nombre fini de points de non locale acyclicité de $(\tilde{X},\tilde{f},\pi^*F)$ en dehors de $\pi^{-1}(Y)$ (les points singuliers de $\tilde{f}|\pi^{-1}(U)$) et, comme on a pris soin

d'ôter à $\mathfrak{F}$ le faisceau constant de même rang sur U, on a, pour tout $\tilde{x}\in\tilde{X}-\pi^{-1}(Y)$,

$$\text{(3.2.1)} \qquad \dim\mathrm{tot}\left[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}\right] = 0.$$

D'autre part, pour un point $\tilde{x}\in\pi^{-1}(Y)$, comme l'axe du pinceau ne rencontre pas Y, f est définie en $x=\pi(\tilde{x})$ et

$$\text{(3.2.2)} \qquad \dim\mathrm{tot}\left[\Phi(\pi^*F,\tilde{f})_{\tilde{x}}\right] = \dim\mathrm{tot}\left[\Phi(F,f)_x\right].$$

De plus, il n'y a qu'un nombre fini de points de non locale acyclicité de (X,f,F) sur Y : d'une part les points de Y-Y°, d'autre part les points de tangence du pinceau avec Y°, i.e. les points $y\in Y°$ tels que la section du pinceau qui passe par y ne soit pas transverse à Y° en y. Cela résulte en effet du théorème de semi-continuité du conducteur de Swan démontré par Deligne ([5]) et dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 3.2.3. Soient S un trait strictement local, $f:X\to S$ une S-courbe lisse (f séparé, lisse purement de dimension relative 1), $Y\subset X$ un fermé fini et plat sur S, $\mathbb{F}_\lambda$ un corps fini de caractéristique inversible sur S, $\mathfrak{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels, de rang constant r, sur $U=X-Y\xrightarrow{u}X$. Alors, si l'on pose, pour tout $t\in S$ (t désigne donc soit le point fermé s de S, soit le point générique η de S),

$$\Phi(t) = \sum_{y\in Y_{\bar{t}}}\left[\mathrm{Sw}_y(\mathfrak{F}|U\times_X X_{\bar{t}}) + r\right],$$

où $\bar{t}$ est un point géométrique arbitraire localisé en t et où $X_{\bar{t}}$ (resp. $Y_{\bar{t}}$) est la fibre en $\bar{t}$ de f (resp. f|Y), on a

$$\Phi(s) - \Phi(\eta) = -\sum_{y\in Y_s}\dim_{\mathbb{F}_\lambda}\left[R\Psi^1(u_!\mathfrak{F},f)_y\right],$$

les autres $R\Psi^i(u_!\mathfrak{F},f)_y$ étant nuls ($i\neq 1$, $y\in Y_s$).

Par définition de Y°, il en résulte que, dans notre situation, si $x\in Y°$ et si $f^{-1}(f(x))$ est lisse et transverse à Y° en x, on a $R\Psi(u_!\mathfrak{F},f)_y=0$, ce qui entraîne facilement $\dim\mathrm{tot}\left[\Phi(F,f)_x\right]=0$.

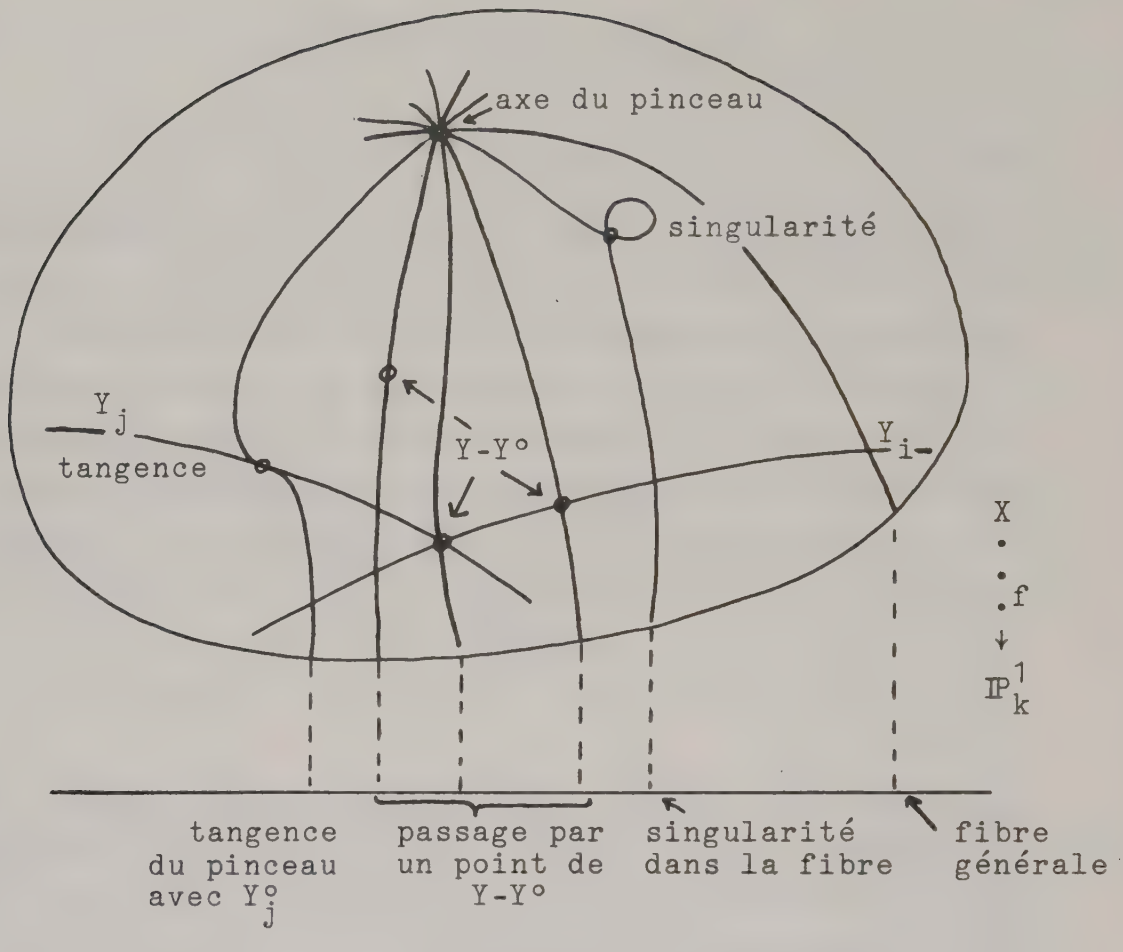


Figure 3.2.4. Les divers types de points de non locale acyclicité de (X,f,F).

Pour un pinceau vérifiant les conditions a), b) et c) ci-dessus, on a donc

$$(3.2.5) \qquad \chi(X,F) = \sum_{x \in Y-Y^\circ} Sw_x(\mathfrak{F},f) - \sum_{\substack{y \in Y^\circ \\ y \text{ tangence}}} \text{dimtot}\left[\Phi(F,f)_x\right].$$

Pour prouver (1.2.1.1), il reste donc à montrer que la contribution des tangences est nulle et à prouver 2.3.6.

4. Démonstration des théorèmes 1.2.1 et 2.3.6.

Nous nous bornerons à indiquer les principales étapes de la démonstration des théorèmes 1.2.1 et 2.3.6.

4.0. Pour tout plongement projectif $\tau:X\hookrightarrow P=\mathbb{P}_k^m$ de X, notons $P^\vee$ l'espace projectif dual de P, Grass(1,$P^\vee$) la grassmannienne des droites de P et $W(\tau)$ l'ouvert de Grass(1,$P^\vee$) dont les points fermés sont les pinceaux d'hyperplans de P, $(H_t)_{t\in D}$, qui vérifient les conditions suivantes :

(i) l'axe, $\Delta=\bigcap_{t\in D} H_t$, de D ne rencontre ni Y, ni le lieu singulier de X et est transverse à X ;

(ii) il existe un ensemble fini de points fermés de D, S, tel que, si $t\in D-S$, H_t ne rencontre pas Y-Y°, ni le lieu singulier de X et est transverse à X et à Y ;

(iii) S est réunion disjointe de trois ensembles finis de points fermés de D, S_{sing}, S_{excp} et S_{tang}, caractérisés par:

a) si $t\in S_{sing}$, H_t est transverse à X sauf en un point x_t, $x_t\in X-Y$, H_t ne rencontre pas Y-Y° et H_t est transverse à Y,

b) si $t\in S_{excp}$, H_t coupe Y-Y° en un point et un seul, x_t, H_t ne rencontre pas le lieu singulier de X en dehors de x_t et H_t est transverse à X et à Y en dehors de x_t,

c) si $t\in S_{tang}$, H_t ne rencontre ni le lieu singulier de X, ni Y-Y°, H_t est transverse à X et H_t est transverse à Y sauf en un point x_t, qui est un point singulier quadratique ordinaire de $Y.H_t$ (cf.[3]1.2).

D'autre part, pour tout entier d>0, notons $\tau_{(d)}:X\hookrightarrow P_{(d)}$ le d-ième multiple du plongement τ ($P_{(d)}=\mathbb{P}_k^{m(d)}$ où m(d) est égal à $\binom{m+d}{d}-1$).

Lemme 4.0.1. Pour tout plongement projectif $\tau:X\hookrightarrow P$ de X et tout entier $d\geqslant 2$, $W(\tau_{(d)})$ est un ouvert dense de Grass(1,$P^\vee$).

4.1. Soit $\tau:X\hookrightarrow P$ un plongement projectif de X tel que $W(\tau)$ soit non vide, alors il existe un ouvert dense $W^\circ(\tau)$ de $W(\tau)$ et des entiers $S_x(\tau)$ ($x\in Y-Y^\circ$), $T_i(\tau)$ ($i\in I$) ayant la propriété suivante : pour tout $D\in W^\circ(\tau)$, si $f_D:X\dashrightarrow D$ désigne la projection associée à ce pinceau (f_D est définie en dehors de l'axe de D), on a

$$Sw_x(\mathfrak{F},f_D) = S_x(\tau) \qquad (x\in Y-Y^\circ)$$

et

$$\dim\mathrm{tot}\left[\Phi(F,f_D)_{x_t}\right] = T_i(\tau) \qquad (t\in S_{tang},\ x_t\in Y_i^\circ).$$

4.2. Pour tout point fermé x de X et tout $N\in\mathbb{N}$, notons $J_{N,x}$ le schéma des jets à l'ordre N, i.e. modulo $m_{X,x}^{N+1}$, de bonnes projections locales $f:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ en x. Si $x\in Y^\circ$, notons $J_{N,x}^{tg}$ la partie localement fermée de $J_{N,x}$ formée des jets de projections locales $f:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ qui sont lisses et telles que $f|Y\times_X X_{(x)}$ présente en x une singularité quadratique ordinaire ([3]1.2). Alors

a) pour tout $x\in Y-Y^\circ$, il existe $N_x>0$ et un ouvert dense de $J_{N_x,x}$ ayant la propriété suivante : si j est dans cet ouvert et si $f,g:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ sont deux bonnes projections locales en x qui admettent j comme jet à l'ordre N_x, alors

$$Sw_x(\mathcal{F},f) = Sw_x(\mathcal{F},g)\ ;$$

b) pour tout $i\in I$, il existe $N_i>0$ et, pour tout $x\in Y_i^\circ$, un ouvert dense de $J_{N_i,x}^{tg}$ ayant la propriété suivante : si j est dans cet ouvert dense et si $f,g:X_{(x)}\to\mathbb{A}_k^1$ sont deux bonnes projections locales qui admettent j comme jet à l'ordre N_i, alors

$$\dim\mathrm{tot}\left[\Phi(F,f)_x\right] = \dim\mathrm{tot}\left[\Phi(F,g)_x\right].$$

4.3. Il existe un entier $N\geqslant 2$ et, pour tout $x\in Y-Y^\circ$ (resp. pour tout $i\in I$), un entier S_x (resp. T_i) ayant la propriété suivante : si $\tau:X\hookrightarrow P$ est un plongement projectif de X et si $d\geqslant N$, alors

$$S_x(\tau_{(d)}) = S_x \qquad (x\in Y-Y^\circ)$$

(resp.
$$T_i(\tau_{(d)}) = T_i \qquad (i\in I)).$$

4.4. Il résulte de 3.2.5, 4.1 et 4.3 que, pour tout plongement projectif $\tau:X\hookrightarrow P$ et tout entier $d\geqslant N$ (N étant l'entier défini en 4.3), on a

$$\chi(X,F) = \sum_{x\in Y-Y^\circ} S_x - \sum_{i\in I} \deg^\vee(Y_i,\tau_{(d)}).T_i, \tag{4.4.1}$$

où, pour toute courbe C tracée sur X, $\deg^\vee(C,\tau_{(d)})$ désigne

le degré de la variété duale de C relativement au plongement projectif $\tau_{(d)}|C:C\hookrightarrow X\hookrightarrow P_{(d)}$.

Or, il existe des entiers $a_i(\tau)>0$ et $b_i(\tau)$ tels que pour tout d assez grand on ait

$$\deg^{\vee}(Y_i,\tau_{(d)}) = a_i(\tau).d + b_i(\tau) \tag{4.4.2}$$

donc (4.4.1) n'est tenable que si

$$\sum_{i\in I} a_i(\tau).T_i = 0. \tag{4.4.3}$$

4.5. Fixons $i_o\in I$, nous voulons montrer que $T_{i_o}=0$. Il existe existe une surface X' connexe, normale, projective sur k et $r:X'\to X$ fini, étale au dessus du point générique δ_{i_o} de Y_{i_o} et tel que $r^*\mathfrak{F}$, qui est à priori localement constant sur $r^{-1}(U)$, se prolonge en un faisceau localement constant constructible $\mathfrak{F}'$ au dessus de l'ouvert U' de X' défini par $U'=X'-(r^{-1}(Y_{i_o})\cup r^{-1}(Y-\bigcup_{i\in I} Y_i^{\circ}))$. Notons $(Y'_{i'})_{i'\in I'}$ la famille des composantes irréductibles de codimension 1 dans X' de $Y'=X'-U'$. Alors, le faisceau $\mathfrak{F}'$ est non férocement ramifié le long des $Y'_{i'}$, et, comme on a associé ci-dessus un entier T_i à $(X,\mathfrak{F})$ et à chaque $i\in I$, on peut associer un entier $T_{i'}$ à $(X',\mathfrak{F}')$ et à chaque $i'\in I'$. Il résulte de 4.2 que

$$T_{i'} = T_{i_o} \qquad (\forall i'\in I'). \tag{4.5.1}$$

Or (4.4.3) s'applique à $(X',\mathfrak{F}')$ et donc, pour tout plongement projectif $\tau':X'\hookrightarrow P'$, on a un relation

$$\sum_{i'\in I'} a_{i'}(\tau').T_{i'} = 0 \tag{4.5.2}$$

où les $a_{i'}(\tau')$ sont strictement positifs. Combinant (4.5.1) et (4.5.2), on obtient

$$\sum_{i'\in I'} a_{i'}(\tau').T_{i_o} = 0 \tag{4.5.3}$$

d'où $T_{i_o}=0$. Par suite on a montré que

$$\chi(X,F) = \sum_{x\in Y-Y^{\circ}} S_x. \tag{4.5.4}$$

4.6. Il ne reste plus qu'à prouver 2.3.6 et l'égalité $S_x = Sw_x(\mathcal{F})$ pour tout $x \in Y-Y^\circ$. On va le faire par passage du local au global. Soit $f:X_{(x)} \to \mathbb{A}^1_k$ une bonne projection locale, alors il existe un entier N_f tel que, si $g:X_{(x)} \to \mathbb{A}^1_k$ est une autre bonne projection locale ayant même jet à l'ordre N_f que f, on ait

$$Sw_x(\mathcal{F},g) = Sw_x(\mathcal{F},f).$$

D'autre part, il existe un plongement projectif $\tau:X \hookrightarrow P$ tel que $W(\tau) \neq \emptyset$ et un pinceau $D \in W(\tau)$ tel que f et f_D aient même jet à l'ordre N_f en x ; de plus, on peut imposer à D d'être tel que

$$(4.6.1) \qquad Sw_{x'}(\mathcal{F},f_D) = S_{x'} \qquad (\forall x' \in Y-Y^\circ-\{x\})$$

et que

$$(4.6.2) \qquad \dim\mathrm{tot}\left[\Phi(F,f_D)_{x_t}\right] = T_i = 0 \quad (\forall t \in S_{tang},\ x_t \in Y_i^\circ).$$

Alors, si on calcule $\chi(X,F)$ à l'aide de f_D, on obtient par (3.2.5)

$$(4.6.3) \qquad \chi(X,F) = Sw_x(\mathcal{F},f) + \sum_{\substack{x' \in Y-Y^\circ \\ x' \neq x}} S_{x'} ;$$

par suite, si l'on compare avec (4.5.4), on voit que

$$(4.6.4) \qquad Sw_x(\mathcal{F},f) = S_x$$

et 2.3.6 est démontré ainsi que l'égalité $S_x = Sw_x(\mathcal{F})$.

Remarque 4.6.5. Si l'on part d'une situation locale $(\bar{X},\mathcal{F})$, où $\bar{X}$ est un schéma strictement local normal, de dimension 2, essentiellement de type fini sur k et où $\mathcal{F}$ est un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur un ouvert dense $\bar{U}$ de $\bar{X}$, faisceau que l'on suppose non férocement ramifié le long de $\bar{X}-\bar{U}$, alors on peut montrer qu'il existe une surface normale, projective sur k, X, un ouvert dense U de X, un faisceau $\mathcal{F}$ localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur U, non férocement ramifié le long de X-U, et un point fermé x de X tels que $\bar{X}=X_{(x)}$, $\bar{U}=U\times_X X_{(x)}$ et $\mathcal{F}=\mathcal{F}|U\times_X X_{(x)}$ (ce point est dû à Gabber). Par suite, l'énoncé 2.3.6 admet une variante purement locale qui se démontre par voie globale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.DELIGNE.- Lettre à L.Illusie, 28 novembre 1976.

[2] P.DELIGNE.- Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) XIII. Le formalisme des cycles évanescents. Springer Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag (1973) p. 82-115.

[3] P.DELIGNE.- Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) XV. La formule de Picard-Lefschetz. Springer Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag (1973) p. 165-196.

[4] A.GROTHENDIECK.- Cohomologie ℓ-adique et fonctions L (SGA 5) X. Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale (rédigé par I.BUCUR). Springer Lecture Notes in Math. 589, Springer-Verlag (1977) p. 372-406.

[5] G.LAUMON.- Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P.DELIGNE). Séminaire de l'ENS 1978-79. Astérisque n°82-83 (1980) p.173-219.

[6] J.P.SERRE.- Représentations linéaires des groupes finis. Troisième édition corrigée, Hermann, Paris (1978).

[7] J.P.SERRE.- Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. Bull. Soc. Math. France, 89 (1961), p. 105-154.

COMPLÉMENTS A "CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ DES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES SUR UNE SURFACE"

Compléments à "Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface".

Nous avons donné dans [12] uniquement les grandes étapes de la démonstration du théorème 1.2.1. Certaines de ces étapes ne posent pas de difficultés majeures ou sont standard (4.0, 4.3, 4.4 et 4.6) ; il n'en va pas de même des autres (4.1, 4.2 et 4.5) pour lesquelles nous donnons dans ces "compléments" un certain nombre de précisions.

5. Existence de l'ouvert dense $W^{o}(\tau)$ (cf. 4.1).

5.0. Dans ce numéro, le plongement projectif $\tau : X \hookrightarrow P$ est fixé de sorte que $W(\tau) \neq \emptyset$ (cf. 4.0.1) et on étudie les variations de

$$Sw_x(\mathfrak{F}, f_D) \qquad (x \in Y\text{-}Y^{o})$$

et de

$$\dim\mathrm{tot}[\Phi(F, f_D)_{x_t}] \qquad (t \in S_{tang}, x_t \in Y_i^{o})$$

quand D décrit $W(\tau)$.

5.1. Fixons $x \in Y\text{-}Y^{o}$, alors

LEMME 5.1.1. Il existe un ouvert dense $W_x(\tau)$ de $W(\tau)$ tel que la fonction

$$D \longmapsto Sw_x(\mathfrak{F}, f_D)$$

soit constante sur $W_x(\tau)$.

Preuve. Soit $g : Q \longrightarrow W = W(\tau)$ la restriction à $W \subset \mathrm{Grass}(1, P^{\vee})$ du fibré en droite tautologique sur $\mathrm{Grass}(1, P^{\vee})$,

$$Q = \{(t, D) \in P^{\vee} \times_k W \mid t \in D\}$$

et soit $\sigma : W \longrightarrow Q$ la section définie par $\sigma(D) = (t_D, D)$ où $t_D \in D$ est caractérisé par $x \in H_{t_D}$ (par hypothèse, l'axe Δ de D ne passe pas par x) ; soit $\tilde{X}$ la "variété d'incidence" de X au-dessus de Q,

$$\tilde{X} = \{(x',(t,D)) \in X \times_k Q \mid x' \in H_t\}$$

et soient

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \tilde{f} \downarrow & & \\ Q & & \end{array}$$

les projections naturelles, de sorte que la "fibre" en D du diagramme ci-dessus est le diagramme (3.1.1),

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_D & \xrightarrow{\pi_D} & X \\ \tilde{f}_D \downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

On note $\tilde{F}$ (resp. $\tilde{F}_D$) la restriction à $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{X}_D$) du faisceau virtuel F (cf. (2.3.5.2)) et on pose

$$G = \tilde{f}_* \tilde{F}$$

de sorte que G est dans $K_c^b(Q, \mathbf{F}_\lambda)$.

Soit D un point géométrique de W, soit $D_{(t_D)}$ le localisé strict de D au point fermé t_D, soit δ_D le point générique de $D_{(t_D)}$ et soit $\bar{\delta}_D$ un point géométrique au-dessus de δ_D. On a alors un diagramme de cycles évanescents

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{\delta}_D} & \longrightarrow & \tilde{X}_D \times_D D_{(t_D)} & \longleftarrow & X_{t_D} \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_D & & \downarrow \\ \bar{\delta}_D & \longrightarrow & D_{(t_D)} & \longleftarrow & t_D \end{array}$$

et, comme en (3.1.8), compte-tenu du fait que $D \in W(\tau)$, de (3.2.1) et du théorème de changement de base pour un morphisme propre, on a la relation

$$Sw_x(\mathfrak{F}, f_D) = -a_{\sigma(D)}(G|D_{(t_D)} \times \{D\})$$

(cf. (3.1.5) pour la définition de a_{t_D}).

La constructibilité de la fonction $D \longmapsto Sw_x(\mathfrak{F}, f_D)$ résulte alors de la variante suivante de [5] 2.1.1 (i) qui complète 3.2.3.

PROPOSITION 5.1.2. Soit S un schéma excellent noethérien, soit $f : X \longrightarrow S$ une S-courbe lisse (f séparé, lisse purement de dimension relative 1), soit $Y \subset X$ un fermé fini et plat sur S, soit $\mathbf{F}_\lambda$ un corps fini de caractéristique inversible sur S et soit $F \in K_c^b(X, \mathbf{F}_\lambda)$. Alors, si on pose, pour tout $s \in S$,

$$\varphi(s) = \sum_{y \in Y_{\bar{s}}} a_y(F|(X_{\bar{s}})_{(y)})$$

où $\bar{s}$ est un point géométrique localisé en s (cf. (3.1.5) pour la définition de a_y), alors $\varphi(s)$ ne dépend pas du choix de $\bar{s}$ et $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{Z}$ est constructible.

En effet, on peut supposer que $F = [\mathfrak{F}]$ pour un faisceau constructible $\mathfrak{F}$ de $\mathbf{F}_\lambda$-vectoriels puis, quitte à stratifier S et à rétrécir X en un voisinage de Y dans X, on peut supposer $\mathfrak{F}|X-Y$ et $\mathfrak{F}|Y$ lisses ; enfin, on peut supposer $\mathfrak{F}|Y = 0$ et alors on est ramené à [5] 2.1.1 (i).

5.2. Fixons un $i \in I$, i.e. un Y_i. Pour $D \in W(\tau) = W$, notons $S^i_{tang}(D) \subset S_{tang}(D) \subset D$ le sous-ensemble fini de D caractérisé par 4.0 (iii) c) et $x_t \in Y_i^o$. Alors

$$\mathrm{dimtot}[\Phi(F, f_D)_{x_t}]$$

est de façon naturelle une fonction sur

$$R_i = \{(t,D) \in P^\vee \times_k W \mid t \in S^i_{tang}(D)\} ;$$

en fait R_i est une partie localement fermée de Q (cf. 5.1) et si h_i est la restriction à R_i de la projection $g : Q \longrightarrow W$,

$$\begin{array}{ccc} R_i & \hookrightarrow & Q \\ & {\scriptstyle h_i}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & W & \end{array}$$

h_i est quasi-fini et est un revêtement fini étale au-dessus d'un ouvert dense de W.

LEMME 5.2.1. Il existe un ouvert dense R_i^o de R_i tel que la fonction

$$(t,D) \longmapsto \mathrm{dimtot}[\Phi(F, f_D)_{x_t}]$$

soit constante sur R_i^o.

Preuve. C'est quasiment la même que pour 5.1.1. Soit $Q_i \xrightarrow{g_i} R_i$ l'image réciproque de $g : Q \longrightarrow W$ par h_i et soit $R_i \xrightarrow{\sigma_i} Q_i$ la section de g_i déterminée par l'inclusion $R_i \hookrightarrow Q$,

$$Q_i = \{(t',(t,D)) \in P^\vee \times_k R_i \mid t' \in D\}$$

et

$$\sigma(t,D) = (t,(t,D)) .$$

Soit $X_i \xrightarrow{\tilde{f}_i} Q_i$ la variété d'incidence" de X au-dessus de Q_i ,

$$\tilde{X}_i = \{(x',(t',(t,D))) \in X \times_k Q_i \mid x' \in H_{t'}\} ,$$

soit $\tilde{F}_i$ la restriction de F à $\tilde{X}_i$ et soit

$$G_i = \tilde{f}_{i*}\tilde{F}_i .$$

Soit (t,D) un point géométrique de R_i et soit $D_{(t)}$ le localisé strict de D au point fermé t , alors, on a, comme en 5.1.1,

$$\dim\mathrm{tot}\left[\Phi(F,f_D)_{x_t}\right] = a_{\sigma_i(t,D)}(G_i|_{D_{(t)}} \times \{(t,D)\})$$

et on conclut par 5.1.2.

5.3. Pour tout $i \in I$, soit $W_i(\tau) \subset W(\tau)$ un ouvert dense tel que $h_i^{-1}(W_i(\tau)) \subset R_i^o$ (cf. 5.2.1) alors

$$W^o(\tau) = \left(\bigcap_{x \in Y-Y^o} W_x(\tau)\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} W_i(\tau)\right)$$

fait marcher 4.1.

6. Existence d'un ordre de jet suffisant en un point $x \in X$ (cf. 4.2).

6.0. Commençons par introduire une "mesure" d'une singularité isolée d'un morphisme.

Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme séparé, de type fini, entre schémas noethériens, présentant en un point fermé t de T au pire une singularité isolée ; posons $s = f(t)$.

Fixons dans un premier temps un diagramme de morphismes de schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (V,v) & \xrightarrow{\beta} & (T,t) \\ \downarrow & & \downarrow f \\ (U,u) & \xrightarrow{\alpha} & (S,s) \end{array} \qquad (6.0.1)$$

où

(i) $U = \mathrm{Spec}(A)$ et $V = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines et u et v sont des points fermés de U et V correspondant à des idéaux maximaux p et q de A et B respectivement,

(ii) α et β sont étales, de type fini, et induisent des isomorphismes entre les corps résiduels de u et v et de s et t respectivement,

(iii) $V-\{v\} \longrightarrow U$ est un morphisme lisse ;

puis fixons une présentation de V/U , i.e. de $A \longrightarrow B$

$$B = A[Y_1,\ldots,Y_N]/(g_1,\ldots,g_q) \qquad (6.0.2)$$

avec $g_1,\ldots,g_q \in A[Y_1,\ldots,Y_N]$, de sorte que

$$q = p.B + (Y_1,\ldots,Y_N).B \ .$$

On définit alors un idéal H_B de $A[Y_1,\ldots,Y_N]$, tel que le support de $H_B.B$ dans V soit précisément le lieu de non lissité de $V \longrightarrow U$, de la manière suivante (cf. [9] 0.2) : on considère pour tout $p \in \{1,2,\ldots,q\}$ et pour tout p-uplet $(\alpha) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ avec $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \leqslant q$, l'idéal $K_{(\alpha)}$ de $A[Y_1,\ldots,Y_N]$ défini par

$$K_{(\alpha)} = \{h \in A[Y_1,\ldots,Y_N] \mid h.(g_1,\ldots,g_q) \subset (g_{\alpha_1},\ldots,g_{\alpha_p})\}$$

et l'idéal $\Delta_{(\alpha)}$ de $A[Y_1,\ldots,Y_N]$ engendré par les $p \times p$-mineurs de la matrice jacobienne

$$(\partial g_{\alpha_i}/\partial Y_\nu)_{\substack{i=1,\ldots,p \\ \nu=1,\ldots,N}}$$

et on pose

$$H_B = \sum_{p,(\alpha)} K_{(\alpha)} \Delta_{(\alpha)} \qquad (6.0.3)$$

(le critère jacobien assure que le support de $H_B.B$ dans V est précisément le lieu de non lissité de $V \longrightarrow U$). Comme $V-\{v\} \longrightarrow U$ est lisse, le théorème des zéros de Hilbert dit qu'il existe un entier positif e tel que

(6.0.4) $H_B + (g_1,\ldots,g_q) \supset (pA[Y_1,\ldots,Y_N]+(Y_1,\ldots,Y_N))^e$;

nous noterons $e(V/U,P)$, où V/U symbolise le diagramme (6.0.1) et P la présentation (6.0.2), le plus petit entier $e \geqslant 0$ satisfaisant (6.0.4).

L'entier $e_t(f)$ mesurant la singularité de f ou t est alors par définition :

(6.0.5) $$e_t(f) = \inf\{e(V/U,P)\}$$

pour V/U parcourant l'ensemble des diagrammes (6.0.1) et P l'ensemble des présentations (6.0.2).

Remarques 6.0.6.1. $e_t(f)$ ne dépend que du morphisme $f : T_{(t)} \longrightarrow S_{(s)}$ entre les hensélisés de S en s et T en t et donc a un sens pour des morphismes qui proviennent par localisation d'un morphisme séparé de type fini entre schémas noethériens.

6.0.6.2. Supposons que, pour un entier $d \geqslant 0$ fixé, $f : T \longrightarrow S$ vérifie, de plus, l'une des conditions suivantes :

(a) f est plat en t et $\dim_t, f^{-1}(f(t')) = d$ pour tout t' dans un voisinage de t ,

(b) f est d'intersection complète relative de dimension virtuelle d en t .

Alors, on a

$$e_t(f) = \operatorname{long}_{\mathcal{O}_{T,t}}(\mathcal{O}_{T,t}/F_d(\Omega^1_{T/S})_t)$$

où $F_d(\Omega^1_{T/S})$ est le d-ième idéal de Fitting de $\Omega^1_{T/S}$.

6.1. Revenons à la situation de 1.2.

LEMME 6.1.1. Quitte à modifier Y et Y^o , on peut supposer qu'il existe un revêtement fini normal connexe

$$\pi : X' \longrightarrow X$$

tel que

(i) $\pi : U' = \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ est étale, galoisien et trivialise $\mathcal{F}$ (on note G le groupe de Galois de $U' \longrightarrow U$)

(ii) $\pi : Y' = (\pi^{-1}(Y))_{red} \longrightarrow Y$ est étale au-dessus de Y^o (on note $Y'^o = (\pi^{-1}(Y^o))_{red}$).

Preuve. $\mathcal{F}$ est non férocement ramifié le long de Y .

On fixera dans la suite un tel revêtement $X' \xrightarrow{\pi} X$. Soit x un point fermé de X et soit $f : X_{(x)} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ une bonne projection locale en x (cf. 2.3), alors

LEMME 6.1.2. Pour tout point fermé x' de X' au-dessus de x , les projections composées

$$f\circ\pi : X'_{(x')} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k \quad \text{et} \quad f\circ\pi : Y'\times_{X'} X'_{(x')} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$$

présentent en x' au pire une singularité isolée.

Preuve. f' est lisse sur $X'_{(x')}\times_{X'} U'$; en un point δ' de $X'_{(x')}\times_{X'} Y'^{O}$, on a d'après 6.1.1 (ii), $k(\delta')/k(\pi(\delta'))$ séparable et comme $f|X_{(x)}\times_X Y^O$ est étale par hypothèse on a $k(\delta')/k(f'(\delta'))$ séparable. Or $\mathcal{O}_{X'_{(\delta')},\delta'}$ est normal, de dimension 1 , donc est régulier, par suite f' est lisse en δ' (cf. [10] IV 17.15.1) ; d'où la conclusion.

On posera alors

$$(6.1.3) \qquad e'_x(f) = \mathrm{Sup}\{e_{x'}(f\circ\pi), e_{x'}(f\circ\pi|Y') \,|\, x' \in \pi^{-1}(x)\}$$

où $e_{x'}(f\circ\pi|Y') = 0$ si $x \notin Y$; l'énoncé principal de ce numéro est le suivant :

THÉORÈME 6.1.4. Fixons un point fermé x de X et un entier $e \geqslant 0$, alors il existe un entier $N(x,e) \geqslant 0$ (qui dépend du choix de $\pi : X' \longrightarrow X$, mais pas directement de $\mathcal{F}$) ayant la propriété suivante : soient $f,g : X_{(x)} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ deux bonnes projections locales en x telles que

(i) f et g ont mêmes jets d'ordre $N(x,e)$ (cf. 4.2),

(ii) $e'_x(g) \leqslant e$

alors

$$R\Psi(j!\mathcal{F},f)_x \quad \text{et} \quad R\Psi(j!\mathcal{F},g)_x$$

sont isomorphes dans $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$ (cf. 2.3.1) et

$$Sw_x(\mathcal{F},f) = Sw_x(\mathcal{F},g)$$

(cf. 2.3.5).

La preuve de 6.1.4 occupera tout le numéro 6.

6.2. Le résultat clé est la proposition suivante qui m'a été suggérée par O. Gabber :

PROPOSITION 6.2.1. *Soient* k *un corps algébriquement clos,* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *un* k*-schéma affine, de type fini,* $x = V(p)$ *un point fermé de* X *et* e *un entier* $\geqslant 0$ *. Alors il existe un entier* $n_o \geqslant 0$ *qui ne dépend en fait que de* e *et du localisé* $X_{(x)}$ *de* X *en* x *et qui vérifie la condition suivante : si* $h : Y \longrightarrow X$ *est un* k*-morphisme affine de type fini, muni d'une présentation*

$$Y = \mathrm{Spec}(B) \ , \ B = A[Y_1,\ldots,Y_N]/(g_1,\ldots,g_q)$$

et si $\sigma_1,\sigma_2 : X \rightrightarrows Y$ *sont deux sections de* h *telles que*

$$\sigma_1^* \equiv \sigma_2^* \pmod{p^{n_o+1}}$$

et que

$$\sigma_1^*(H_B.B).A_p \supset (p.A_p)^e$$

où H_B *est l'idéal de* $A[Y_1,\ldots,Y_N]$ *défini en* (6.0.3)*, alors on peut construire un diagramme commutatif de* k*-schémas de type fini, pointés par des points fermés,*

$$\begin{array}{ccc} (Z',z') & \xrightarrow{\beta'} & (Y,y) \\ {\scriptstyle \tau_i'}\uparrow\downarrow{\scriptstyle p'} & & {\scriptstyle h}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \sigma_i} \\ (X',x') & \xrightarrow{\alpha'} & (X,x) \end{array} \qquad (i = 1,2) \tag{6.2.1.1}$$

où $\tau_1',\tau_2' : (X',x') \rightrightarrows (Z',z')$ *sont deux sections de* p' *et où* $y = \sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ *, de sorte que*

(i) p' *soit lisse en* z'

(ii) α' *soit étale en* x'

(iii) $\sigma_i \circ \alpha' = \beta' \circ \tau_i'$ $(i = 1,2)$.

Remarque 6.2.2. Le point important (qui rend l'énoncé non trivial) est évidemment la lissité de p' en z' : en un certain sens, β' est une homotopie entre σ_1 et σ_2 .

6.2.3. *Prouvons* 6.2.1. Choisissons une k-immersion fermée

$$i : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^M$$

de sorte que $i(x) = (0,\ldots,0) = \underline{0}$, i.e. un épimorphisme de k-algèbres

$$i^* : k[X_1,\ldots,X_M] \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow A$$

avec $i^{*-1}(\mathfrak{p}) = (X_1,\ldots,X_M)$; soit alors

$$p : (Z,z) = (\mathbb{A}^M_X,(\underline{0},x)) \longrightarrow (X,x)$$

la projection canonique, $\mathbb{A}^M_X = \mathrm{Spec}(A[Z_1,\ldots,Z_M])$ et soient

$$\tau_1,\tau_2 : (X,x) \longrightarrow (Z,z)$$

les deux sections de p définies par les homomorphismes de A-algèbres

$$\tau_1^*,\tau_2^* : A[Z_1,\ldots,Z_M] \longrightarrow A$$

avec

$$\begin{cases} \tau_1^*(Z_\mu) = 0 \\ \tau_2^*(Z_\mu) = i^*(X_\mu) \end{cases} \qquad (\mu = 1,\ldots,M)$$

($\tau_1 : X \longrightarrow \mathbb{A}^M_X$ est la section nulle et τ_2 est le composé de la diagonale $X \longrightarrow X \times_k X$ et de $\mathrm{id}_X \times_k i : X \times_k X \longrightarrow X \times_k \mathbb{A}^M_k = \mathbb{A}^M_X$).

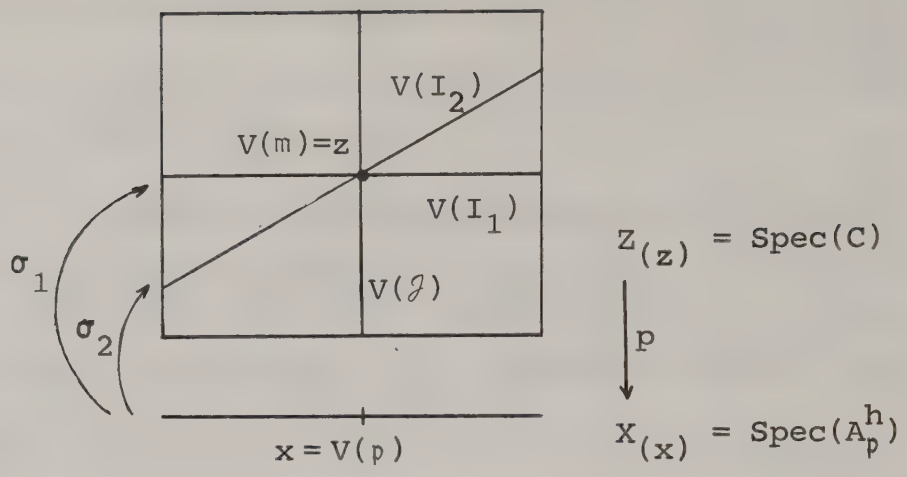
Nous noterons C l'hensélisé de $\mathcal{O}_{Z,z}$, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de C , $\mathcal{J}$ l'idéal $p^*(\mathfrak{p}).C$ de C et, pour $i = 1,2$, I_i le noyau de $\tau_i^* : C \longrightarrow A^h_{\mathfrak{p}}$; on a donc

$$I_1 = (Z_1,\ldots,Z_\mu).C$$

$$I_2 = (Z_1 - i^*(X_1),\ldots,Z_M - i^*(X_M)).C$$

et

$$I_1 + I_2 = \mathfrak{m}$$



Pour tout entier $n > 0$, définissons, pour $i = 1,2$, l'homomorphisme de A-algèbres (B en est une via h^*)

$$(\beta_i^o)^* : B \longrightarrow C/(\mathcal{J}I_i)^n$$

comme le composé

$$B \xrightarrow{\sigma_i^*} A \xrightarrow{p^*} C \twoheadrightarrow C/(\mathcal{J}I_i)^n \ .$$

Supposons alors que

(6.2.3.0) $$\sigma_1^* \equiv \sigma_2^* \mod p^{3n} \ ,$$

comme on a

$$p^*(p).C = \mathcal{J} \subset m = I_1+I_2$$

et

$$(I_1+I_2)^{2n} \subset I_1^n+I_2^n \ ,$$

les composés

$$B \xrightarrow{(\beta_i^o)^*} C/(\mathcal{J}I_i)^n \twoheadrightarrow C/\mathcal{J}^n(I_1^n+I_2^n)$$

coïncident et donc l'homomorphisme

$$((\beta_1^o)^*,(\beta_2^o)^*) : B \longrightarrow C/(\mathcal{J}I_1)^n \times C(\mathcal{J}I_2)^n$$

se factorise en

$$B \xrightarrow{(\beta^o)^*} C/[(\mathcal{J}I_1)^n \cap (\mathcal{J}I_2)^n] \longrightarrow C/(\mathcal{J}I_1)^n \times C/(\mathcal{J}I_2)^n \ .$$

D'autre part, le lemme d'Artin-Rees dit qu'il existe un entier $n_1 \geqslant 1$ tel que, pour tout entier $n > n_1$, on ait

$$(\mathcal{J}I_1)^n \cap (\mathcal{J}I_2)^n \subset \mathcal{J}^{n-n_1} I$$

où on a posé $I = I_1 \cap I_2$. Par suite, il existe un entier n_1, qui ne dépend que de (X,x) et du choix de $i : (X,x) \hookrightarrow (\mathbb{A}^M_k, \underline{0})$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $n > n_1$ pour lequel (6.2.3.0) est vérifiée, on a un diagramme commutatif, pour $i = 1,2$,

(6.2.3.1)
$$\begin{array}{ccccc} & & B & \xrightarrow{\sigma_i^*} & A \xrightarrow{p^*} C \\ & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle (\beta^o)^*} & & \downarrow \\ C/(\mathcal{J}^{n-n_1} I) & \longleftarrow & C/[(\mathcal{J}I_1)^n \cap (\mathcal{J}I_2)^n] & \twoheadrightarrow & C/(\mathcal{J}I_i)^n \end{array} .$$

Il résulte de (6.2.3.1) que, pour $n > n_1$ pour lequel (6.2.3.0) est vérifiée, il existe

$$\underline{c}^o = (c_1^o, \ldots, c_N^o) \in C^N$$

ayant les propriétés suivantes :

(6.2.3.2) $$c_\nu^o \equiv p^*\sigma_i^*(Y_\nu) \mod (\mathcal{J}I_i)^n \quad (i = 1,2 \; ; \; \nu = 1, \ldots, N)$$

(6.2.3.3) $$J(\underline{c}^o) \subset \mathcal{J}^{n-n_1} I$$

(6.2.3.4) $$H(\underline{c}^o) + (\mathcal{J}I_1)^n \supset p_1^*\sigma_1^*(H_B.B).C$$

où, on a posé

$$J = (g_1, \ldots, g_q) \otimes_{A \xrightarrow{p^*} C}$$

$$H = H_B \otimes_{A \xrightarrow{p^*} C}$$

(J et H sont deux idéaux de $C[Y_1, \ldots, Y_N]$).

Maintenant par hypothèse, on a

$$\sigma_1^*(H_B.B).A_\mathfrak{p} \supset (\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p})^e$$

donc on a

$$p^*\sigma_1^*(H_B.B).C \supset \mathcal{J}^e \; ;$$

par suite, si $n > \sup(n_1,e)$ est tel que (6.2.3.0) est vérifiée, on a (cf. (6.2.3.4))

$$H(\underline{c}^o) + (\mathcal{J}I_1)^n \supset \mathcal{J}^e$$

et donc, par le lemme de Nakayama, on a

(6.2.3.5) $$H(\underline{c}^o) \supset \mathcal{J}^e \ .$$

Posons

$$D = B \otimes_{A \xrightarrow{p^*}} C = C[Y_1,\ldots,Y_N]/J$$

on a alors

$$J = (g_1,\ldots,g_p)$$

et

$$H = H_D$$

où H_D est l'idéal défini en (6.0.3) pour la présentation ci-dessus de D ; donc, on peut appliquer à $(C,\mathcal{J})$, I et e la variante suivante de [9] II, Théorème 2, variante que l'on démontrera dans l'Appendice.

THÉORÈME 6.2.3.6. *Soient $(C,\mathcal{J})$ un couple hensélien noethérien, I un idéal de C et e un entier $\geqslant 0$. Alors, il existe un couple d'entiers (m_o,r), avec $m_o \geqslant r$, satisfaisant la condition suivante : si D est une C-algèbre de type fini, munie d'une présentation*

$$D = C[Y_1,\ldots,Y_N]/J \ , \ J = (g_1,\ldots,g_q)$$

si m est un entier $\geqslant m_o$ et si $\underline{c}^o = (c_1^o,\ldots,c_N^o) \in C^N$ vérifie

$$J(\underline{c}^o) \subset \mathcal{J}^m I$$

$$H_D(\underline{c}^o) \supset \mathcal{J}^e$$

alors, il existe $\underline{c} = (c_1,\ldots,c_N) \in C^N$ tel que

$$\underline{c} \equiv \underline{c}^o \bmod \mathcal{J}^{m-r}I$$

et

$$J(\underline{c}) = 0 \ .$$

Par suite, si $n_o = 3\sup(n_1+m_o,e)+2$ et si

(6.2.3.7) $$\sigma_1^* \equiv \sigma_2^* \bmod p^{n_o+1}$$

on a, pour $n = \sup(n_1+m_o, e) + 1$, $3n = n_o+1$, donc

$$\sigma_1^* \equiv \sigma_2^* \bmod p^{3n}$$

et $n > \sup(n_1, e)$, on a $\underline{c}^o \in C^N$ avec (6.2.3.2) et

$$J(\underline{c}^o) \subset \mathcal{J}^{n-n_1} I ,$$

$$H(\underline{c}^o) \supset \mathcal{J}^e ;$$

comme, de plus $n-n_1 \geqslant m_o$, il existe $\underline{c} \in C^N$ avec

$$\underline{c} \equiv \underline{c}^o \bmod \mathcal{J}^{n-n_1-r} I$$

et

$$J(\underline{c}) = 0 ;$$

on en déduit que, sous la condition (6.2.3.7), il existe $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_N) \in C^N$ avec $J(\underline{c}) = 0$ et

(6.2.3.8) $$c_\nu - p^* \sigma_i^*(Y_\nu) \in \mathcal{J}^{n-n_1-r} I + (\mathcal{J} I_i)^n \subset I_i$$

pour $i = 1,2$ et $\nu = 1, \ldots, N$.

On notera alors

$$\beta^* : B \longrightarrow C$$

l'homomorphisme de A-algèbres (B en est une via h^*, C en est une via p^*) défini par

$$\beta^*(Y_\nu) = c_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, N)$$

alors, d'après (6.2.3.8), le carré

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\sigma_i^*} & A & \xrightarrow{p^*} & C \\ {\scriptstyle \beta^*}\downarrow & & & & \downarrow \\ C & & \longrightarrow & & C/I_i \end{array}$$

commute, pour $i = 1,2$, donc, si $\alpha^* : A \longrightarrow A_p^h$ est la flèche canonique, on a

(6.2.3.9) $$\tau_i^* \circ \beta^* = \alpha^* \circ \sigma_i^* \quad (i = 1,2)$$

(on rappelle que I_i est le noyau de $\tau_i^* : C \longrightarrow A_p^h$ et que τ_i est une section de p $(i = 1,2)$).

En résumé, sous la condition (6.2.3.7), on a construit un diagramme commutatif de morphismes de k-schémas pointés

$$\begin{array}{ccc} (Z_{(z)},z) & \xrightarrow{\beta} & (Y,y) \\ {\scriptstyle\tau_i}\uparrow\ p\downarrow & & \downarrow h\ \uparrow{\scriptstyle\sigma_i} \\ (X_{(x)},x) & \xrightarrow{\alpha} & (X,x) \end{array} \qquad (i = 1,2)$$

d'où (6.2.1.1) et la conclusion.

6.3. Nous allons dégager le corollaire "utile" de 6.2.1 pour notre démonstration de 6.1.4.

Nous noterons S le localisé de $\mathbb{A}_k^1$ en 0 (k désigne toujours un corps algébriquement clos) et s le point fermé de S (I est le groupe d'inertie de S, cf. 2.3).

Soient X, X' deux k-schémas de type fini et séparés et x, x' des points fermés de X, X' ; on désigne par $X_{(x)}$, $X'_{(x')}$ les localisés correspondants. Si

$$\begin{array}{ccc} (X'_{(x')},x') & \xrightarrow{\theta} & (X_{(x)},x) \\ & {\scriptstyle f'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & (S,s) & \end{array}$$

est un triangle commutatif de k-schémas pointés, on a par fonctorialité des cycles évanescents un morphisme

$$R\Psi(\theta)_{x'} : R\Psi(\mathbb{F}_\lambda, f)_x \longrightarrow R\Psi(\mathbb{F}_\lambda, f')_{x'}$$

dans $D_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$ ($\mathbb{F}_\lambda$ désigne toujours un corps fini de caractéristique distincte de celle de k ; cf. 2.3).

Alors 6.2.1 admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.3.1. *Soient X un k-schéma de type fini et séparé, x un point fermé de X en lequel X présente une singularité isolée (au pire) et e un entier $\geqslant 0$, alors il existe un entier $n_o \geqslant 0$ ayant la propriété suivante : si $f : (X_{(x)},x) \longrightarrow (S,s)$ est un k-morphisme pointé présentant en x au pire une singularité isolée et tel que*

$$e_x(f) \leqslant e$$

(cf. 6.0.5) et si

$$\theta : (X_{(x)},x) \longrightarrow (X_{(x)},x)$$

est un morphisme de schémas pointés tel que

$$f \circ \theta = f$$

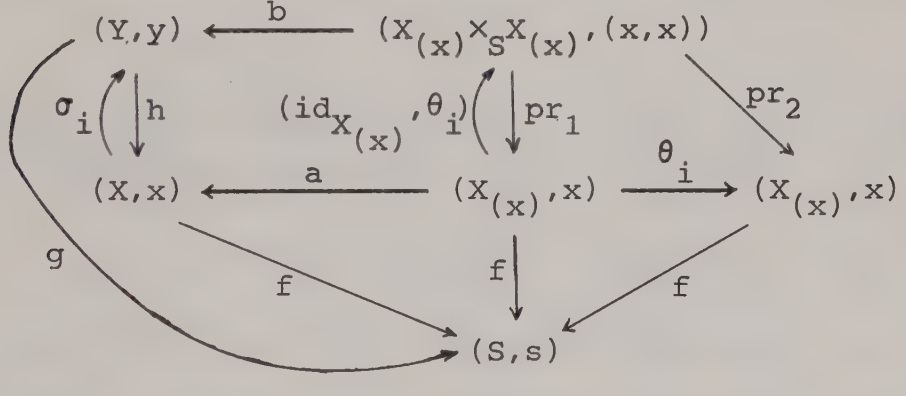
et

$$\theta \equiv id_{X_{(x)}} \mod m_{X,x}^{n_o+1}$$

alors

$$R\Psi(\theta)_x = id_{R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,f)_x} .$$

6.3.2. Preuve. Montrons que l'entier $n_o \geqslant 0$ associé à $X_{(x)}$ et à e en 6.2.1 répond à la question. Soit donc f, θ comme dans l'énoncé et posons $\theta_1 = id_{X_{(x)}}$, $\theta_2 = \theta$; alors quitte à remplacer X par un voisinage de x pour la topologie étale, on peut supposer $X = Spec(A)$ affine avec $V(p) = x$ et qu'il existe un diagramme commutatif de k-schémas pointés $(i = 1,2)$



où h est affine de type fini muni d'une présentation

$$Y = Spec(B) \ , \ B = A[Y_1,\ldots,Y_N]/(g_1,\ldots,g_q)$$

où σ_1, σ_2 sont deux sections de h, où a est la flèche canonique et b est essentiellement étale, et tel que

$$\sigma_1^* \equiv \sigma_2^* \mod p^{n_o+1}$$

et

$$\sigma_1^*(H_B.B).A_p \supset (p.A_p)^e$$

où H_B est l'idéal de $A[Y_1,\ldots,Y_N]$ défini en (6.0.3) (la seule difficulté est de réaliser la seconde condition ; pour cela on remarque, premièrement, que le lieu singulier de pr_1 a pour support $X_{(x)}\times_S\{x\}$ puisque celui de $f : X_{(x)} \longrightarrow S$ est concentré en x et, deuxièmement, que $(id_{X_{(x)}},\theta_1)$, qui est la diagonale de $X_{(x)}\times_S X_{(x)}$, est transverse à $X_{(x)}\times_S\{x\}$; l'inégalité $e_x(f) \leqslant e$ fait le reste).

Vu notre choix de n_o, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (Z',z') & \xrightarrow{\beta'} & (Y,y) \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ (X',x') & \xrightarrow{\alpha'} & (X,x) \end{array}$$

et deux sections τ_1', $\tau_2' : (X',x') \rightrightarrows (Z',z')$ de p' avec p' lisse en z', α' étale en x' et $\sigma_i\circ\alpha' = \beta'\circ\tau_i'$ $(i = 1,2)$; posons alors $f' = f\circ\alpha'$ et $g' = g\circ\beta'$. Comme p' est lisse en z', le morphisme de $D_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$

$$R\Psi(p')_{z'} : R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,f')_{x'} \longrightarrow R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,g')_{z'}$$

est un isomorphisme (cf. [2] (2.1.7.2)) et, comme $p'\circ\tau_1' = p'\circ\tau_2' = id_{X'}$, on en déduit que les morphismes de $D_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$

$$R\Psi(\tau_i')_{x'} : R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,g')_{z'} \longrightarrow R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,f')_{x'}$$

pour $i = 1,2$, coïncident ; par suite, comme $\sigma_i\circ\alpha' = \beta'\circ\tau_i'$, pour $i = 1,2$, on obtient que les morphismes de $D_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$

$$R\Psi(\alpha')_{x'}\circ R\Psi(\sigma_i)_x : R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,g)_y \longrightarrow R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,f')_{x'}$$

pour $i = 1,2$, coïncident ; enfin, comme α' est étale en x',

$$R\Psi(\alpha')_{x'} : R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,f)_x \longrightarrow R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,f')_{x'}$$

est un isomorphisme dans $D_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$ (cf. [2] (2.1.7.2)) et donc les morphismes de $D_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$

$$R\Psi(\sigma_i)_x : R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,g)_y \longrightarrow R\Psi(\mathbb{F}_\lambda,f)_x$$

pour $i = 1,2$ coïncident (on comparera ce raisonnement à [3] 2.1.2).

Maintenant, $R\Psi(a)_x$ et $R\Psi(b)_{(x,x)}$ sont des isomorphismes (cf. [2] (2.1.7.2)), donc

$$R\Psi((id_{X_{(x)}},\theta_1))_x = R\Psi((id_{X_{(x)}},\theta_2))_x$$

et en composant ces morphismes de $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$ avec $R\Psi(pr_2)_{(x,x)}$, on en déduit le corollaire 6.3.1.

6.4. Nous allons voir maintenant comment comparer deux projections.

Soient X un k-schéma de type fini et séparé et x un point fermé de X, en lequel X présente au pire une singularité isolée, alors :

PROPOSITION 6.4.1. Soit e un entier, il existe un couple d'entiers (m_o,r), $m_o \geqslant r \geqslant 0$, ayant la propriété suivante : si m est un entier $> m_o$ et si

$$f,g : (X,x) \rightrightarrows (\mathbb{A}^1_k,0)$$

sont deux k-morphismes pointés tels que

$$f \equiv g \bmod m^m_{X,x}$$

et que g présente en x au pire une singularité isolée avec

$$e_x(g) \leqslant e ,$$

alors il existe un automorphisme θ de $(X_{(x)},x)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (X_{(x)},x) & \xrightarrow{\theta} & (X_{(x)},x) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & (S,s) & \end{array}$$

et tel que

$$\theta \equiv id_{X_{(x)}} \bmod m^{m-r}_{X,x} .$$

6.4.2. Preuve. Quitte à remplacer X par un voisinage affine de x, on peut supposer que $X \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1_k \times S$ est affine sur $S = \mathrm{Spec}(R)$ et admet une présentation

$$i : X \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1_k \times S \hookrightarrow \mathbb{A}^N_S$$

avec $i(x,s) = (\underline{0},s)$, i.e.

$$X \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1_k \times S = \mathrm{Spec}(R[Y_1,\ldots,Y_N]/(g_1,\ldots,g_q))$$

avec

$$(x,s) = V((\pi,Y_1,\ldots,Y_N))$$

où π est une uniformisante de R et, comme $e_x(g) < e$, on peut supposer de plus que

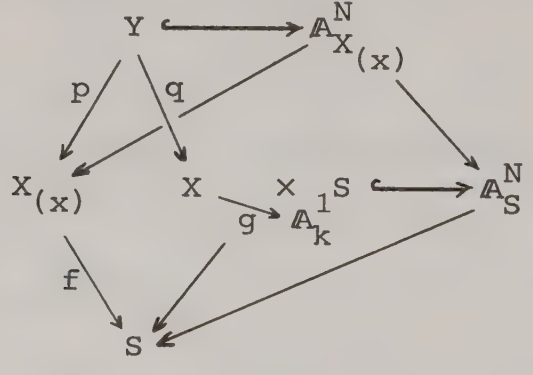
(6.4.2.1) $$H + (g_1,\ldots,g_q) \supset (\pi,Y_1,\ldots,Y_N)^e$$

où H est l'idéal de $R[Y_1,\ldots,Y_N]$ défini en (6.0.3).

Soient A l'hensélisé de $\mathcal{O}_{X,x}$, $\mathfrak{p}$ son idéal maximal et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ où

$$B = A \otimes_R (R[Y_1,\ldots,Y_N]/(g_1,\ldots,g_q)) = A[Y_1,\ldots,Y_N]/J$$

avec J l'idéal de $A[Y_1,\ldots,Y_N]$ engendré par les images de $g_1,\ldots,g_q$; on a donc un diagramme commutatif



et si H_B est l'idéal de $A[Y_1,\ldots,Y_N]$ défini en (6.0.3), on a en outre

(6.4.2.2) $$H_B \supset H.A[Y_1,\ldots,Y_N] .$$

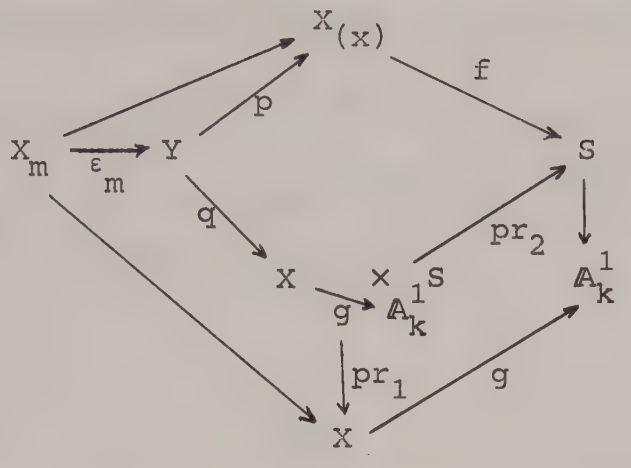
Supposons maintenant que, pour un entier $m > 0$, on ait

$$f \equiv g \bmod \mathfrak{m}^m_{X,x}$$

alors, on dispose d'une section de $p : Y \longrightarrow X_{(x)}$ au-dessus de $X_m = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}^m)$, à savoir l'unique flèche

$$\varepsilon_m : X_m \longrightarrow Y$$

qui rend commutatif le diagramme



(le contour extérieur de ce diagramme commutant par hypothèse). Soit $\underline{a}^o = (a_1,\ldots,a_N) \in A^N$ tel que

$$\varepsilon_m^* : A[Y_1,\ldots,Y_N]/J \longrightarrow A/p^m$$

soit induit par $Y_\nu \longmapsto a_\nu^o$ $(\nu = 1,\ldots,N)$, on a donc

(6.4.2.3) $$J(\underline{a}^o) \subset p^m .$$

D'autre part, $pr_1^*(p).R[Y_1,\ldots,Y_N]/(g_1,\ldots,g_q) = (\pi,Y_1,\ldots,Y_N)$ donc, par définition de ε_m, on a

$$\varepsilon_m^* q^*((\pi,Y_1,\ldots,Y_N)).A/p^m = p/p^m$$

d'où

$$(\pi,Y_1,\ldots,Y_N)(\underline{a}^o) + p^m = p$$

et, par le lemme de Nakayama,

$$(\pi,Y_1,\ldots,Y_N)(\underline{a}^o) = p$$

dès que $m > 1$. Par suite on a (cf. (6.4.2.1) et (6.4.2.2)) et (6.4.2.3))

$$H_B(\underline{a}^o) + p^m \supset H_B(\underline{a}^o) + J(\underline{a}^o) \supset (\pi,Y_1,\ldots,Y_N)^e(\underline{a}^o) = p^e$$

et, donc, par le lemme de Nakayama, on a

(6.4.2.4) $$H_B(\underline{a}^o) \supset p^e$$

dès que $m > \sup(1,e)$.

Alors, d'après [9] II, Thm. 2, il existe un couple (m_o,r) d'entiers positifs que l'on peut choisir de sorte que $m_o > \sup(r+1,e)$ et qui vérifie : si $m > m_o$ et si

$$f \equiv g \bmod m^m_{X,x} ,$$

il existe $\underline{a} \in A^N$ satisfaisant

$$\underline{a} \equiv \underline{a}^o \bmod p^{m-r}$$

et

$$J(\underline{a}) = 0$$

(cf. (6.4.2.3) et (6.4.2.4)). Mais $\underline{a}$ définit une section

$$\varepsilon : X_{(x)} \longrightarrow Y$$

de p qui coïncide avec ε_m sur X_{m-r} et le composé

$$\theta : X_{(x)} \xrightarrow{\varepsilon} Y_{(x,(x,s))} \xrightarrow{pr_1 \circ q} X_{(x)}$$

fait marcher la proposition 6.4.1 (comme $m-r \geqslant 2$, θ est automatiquement un automorphisme).

6.5. Nous sommes maintenant en mesure de prouver 6.4.1.

Considérons le revêtement fini $X' \xrightarrow{\pi} X$ choisi en 6.1.1. Soit x un point fermé de X, alors

$$X' \times_X X_{(x)} = \coprod_{x' \in \pi^{-1}(x)} X'_{(x')} .$$

Si

$$f : X_{(x)} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$$

est une bonne projection locale en x (cf. 2.3), notons

$$f' = f \circ \pi : X' \times_X X_{(x)} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$$

on a alors une "suite spectrale" d'Hochshild-Serre

$$R\Gamma(G, \bigoplus_{x'} R\Psi(j'!\mathcal{F}' | X'_{(x')}, f')_{x'}) = R\Psi(j!\mathcal{F} | X_{(x)}, f)_x$$

où rappelons que $j : U \hookrightarrow X$, $j' : \pi^{-1}(U) = U' \hookrightarrow X'$ sont les inclusions, que G est le groupe de Galois de $\pi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ et que $\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F}$ est constant sur U'. De plus, on a

$$\bigoplus_{x'} R\Psi(j'!\mathcal{F}'|X'_{(x')},f')_{x'} = [\bigoplus_{x'} R\Psi(j'!\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},f')_{x'}] \otimes_{\mathbb{F}_\lambda} \Gamma(U',\mathcal{F}')$$

dans $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I,G])$ (U' est connexe et $\mathcal{F}'$ constant sur U'). Enfin, si $Y' = \pi^{-1}(Y)_{red}$, on a un triangle distingué dans $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I,G])$

$$\begin{array}{ccc} & & \bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|Y'\times_{X'}X'_{(x')},f')_{x'} \\ & \overset{+1}{\swarrow} & \uparrow \\ \bigoplus_{x'} R\Psi(j'!\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},f')_{x'} & \longrightarrow & \bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},f')_{x'} \ . \end{array}$$

Par suite, si $f,g : X_{(x)} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ sont deux bonnes projections locales en x (cf. 2.3), pour montrer que les objets de $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$

$$R\Psi(j!\mathcal{F},f)_x \quad \text{et} \quad R\Psi(j!\mathcal{F},g)_x$$

sont isomorphes, il suffit de montrer que

$$\bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},f')_{x'} \quad \text{et} \quad \bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},g')_{x'}$$

ainsi que

$$\bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|Y'\times_{X'}X'_{(x')},f')_{x'} \quad \text{et} \quad \bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|Y'\times_{X'}X'_{(x')},g')_{x'}$$

sont isomorphes dans $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I,G])$.

Remarquons d'autre part que

$$f \equiv g \bmod m^m_{X,x}$$

implique

$$f' \equiv g' \bmod m^m_{X',x'} \ , \ \forall x' \in \pi^{-1}(x)$$

et que

$$e'_x(g) \leqslant e$$

implique

$$e_{x'}(g') \leqslant e \qquad , \ \forall x' \in \pi^{-1}(x)$$

(cf. (6.1.3)).

Il ne reste plus qu'à invoquer 6.4.1 et 6.3.1 : on prendra pour $N(x,e)$ l'entier

$$N(x,e) = \sup(m_o+1, n_o+r)$$

(où (m_o,r) est un couple d'entiers faisant marcher simultanément 6.4.1 pour l'entier e et pour (X',x'), (Y',x'), $\forall x' \in \pi^{-1}(x)$, et où n_o est un entier faisant marcher simultanément 6.3.1 pour l'entier e et pour (X',x'), (Y',x'), $\forall x' \in \pi^{-1}(x)$.

Si f et g ont même jet d'ordre $N(x,e)$, il existe alors, d'après 6.4.1, pour tout $x' \in \pi^{-1}(x)$ un automorphisme $\theta_{x'}$ de $(X'_{(x')},x')$ tel que

$$g' \circ \theta_{x'} = f' : X'_{(x')} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$$

et tel que

$$\theta_{x'} \equiv id_{X'_{(x')}} \mod m^{N(x,e)-r}_{X'_{(x')},x'} .$$

On a donc un isomorphisme dans $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$

$$\bigoplus_{x'} R\Psi(\theta_{x'})_{x'} : \bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},g')_{x'} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},f')_{x'}$$

mais à priori cet isomorphisme n'est pas compatible aux actions de G : si $\sigma \in G$ et si $\sigma(x') = x''$, on veut que

$$R\Psi(\theta_{x'} \circ \sigma^{-1} \circ \theta^{-1}_{x''} \circ \sigma) = id_{R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|X'_{(x')},g')_{x'}} .$$

Or,

$$\theta_{x'} \circ \sigma^{-1} \circ \theta^{-1}_{x''} \circ \sigma \equiv id_{X'_{(x')}} \mod m^{N(x,e)-r}_{X'_{(x')},x'}$$

par suite, 6.3.1 s'applique et $\bigoplus_{x'} R\Psi(\theta_{x'})_{x'}$ est un isomorphisme dans $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I,G])$.

Le même raisonnement montre que les objets de $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I,G])$

$$\bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|Y'\times_X X'(x'),f')_{x'} \quad \text{et} \quad \bigoplus_{x'} R\Psi(\mathbb{F}_\lambda|Y'\times_X X'_{(x')},g')_{x'}$$

sont isomorphes.

Par suite, on a montré que, dans $D^b_f(\mathbb{F}_\lambda[I])$, on a

$$R\Psi(j!\mathfrak{F},f)_x \simeq R\Psi(j!\mathfrak{F},g)_x \ .$$

En fait ce résultat vaut aussi pour tout faisceau lisse de $\mathbb{F}_\lambda$-vectoriels sur U trivialisé par $U' \longrightarrow U$ donc en particulier pour $\mathfrak{F} = \mathbb{F}_{\lambda,U}$; il reste à voir que

$$R\Psi(\mathbb{F}_{\lambda,Y_i^o},f)_x \simeq R\Psi(\mathbb{F}_{\lambda,Y_i^o},f)_x \quad (\forall i)$$

dans $D_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$, ce qui résulte aussi de la démonstration ci-dessus, d'où l'égalité

$$Sw(\mathfrak{F},f) = Sw_x(\mathfrak{F},g) \ .$$

7. Existence de revêtements finis à ramification donnée en codimension 1 (cf. 4.5).

7.0. Soit X une variété projective sur un corps k algébriquement clos, supposée normale et connexe. Soit $Y \subsetneq X$ un fermé (réduit) de X et soit $(Y_i)_{i\in I}$ la famille des composantes irréductibles de Y de codimension 1 dans X ; pour chaque $i \in I$, soit $Y_i^{oo} \subset Y_i$ l'ouvert dense (X est normale) de Y_i formé des points en lesquels (X,Y) est un k-couple lisse et notons δ_i le point générique de Y_i .

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $U = X-Y$ ($\mathbb{F}_\lambda$ est un corps fini de caractéristique inversible dans k) ; on suppose $\mathfrak{F}$ non férocement ramifié le long de chaque Y_i (cf. 2.1) et on note, $Y_i^o \subset Y_i^{oo} \subset Y_i$ l'ouvert dense de Y_i associé à un tel $\mathfrak{F}$ (cf. 2.2 ; en 2.1 et 2.2, le fait que X soit de dimension 2 ne joue aucun rôle).

7.1. La proposition suivante est due à R. Elkik :

PROPOSITION 7.1.1. Les notations et les hypothèses étant celles de 7.0, fixons un indice $i_o \in I$, i.e. une composante irréductible Y_{i_o} de Y de codimension 1 dans X. Alors, il existe un revêtement fini, normal et connexe,

$$r : X' \longrightarrow X$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) r est étale au-dessus du point générique δ_{i_o} de Y_{i_o}

(ii) $r^*\mathfrak{F}$, qui à priori est un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$-espaces vectoriels sur $r^{-1}(U)$, se prolonge en un faisceau localement constant constructible $\mathfrak{F}'$ sur un ouvert dense U' de X' contenant $r^{-1}(U)$ et les $r^{-1}(\delta_i)$ pour tout $i \in I-\{i_o\}$.

Remarque 7.1.2. Quitte à restreindre les Y_i^o pour les $i \in I-\{i_o\}$, on peut prendre U' de la forme

$$U' = X' - [r^{-1}(Y_{i_o}) \cup r^{-1}(Y - \bigcup_{i\in I} Y_i^o)] .$$

7.1.3. Preuve. Soit $\mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine dense de X qui contient les points génériques δ_i des Y_i $(i \in I)$; notons p_i l'idéal premier de A correspondant à δ_i et K le corps des fractions de A (A est normal, donc intègre) ; on peut prendre $\mathrm{Spec}(A)$ aussi petit que l'on veut ou si l'on préfère considérer le semi localisé de X en les δ_i $(i \in I)$.

Il existe un revêtement fini, normal et connexe, génériquement étale

$$\pi : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

qui trivialise $\mathfrak{F}$ (i.e. tel que $\pi^*(\mathfrak{F}|U\cap \mathrm{Spec}(A))$ soit constant sur $\pi^{-1}(U\cap \mathrm{Spec}(A))$) et tel que les extensions résiduelles $A/p_i \longrightarrow B\otimes_A A/p_i$ soient séparables (cf. 6.1.1) ; d'après [11] III §6 Prop. 12, on peut supposer (quitte à rétrécir $\mathrm{Spec}(A)$) que

$$L = \mathrm{Frac}(B) = K[T]/(g(T))$$

où

$$g(T) = T^s + b_1 T^{s-1} + \ldots + b_s \in A[T] .$$

Pour démontrer 7.1.1, il suffit clairement de trouver une K-algèbre fini séparable K' telle que la clôture intégrale A' de A dans K' vérifie :

$(i)_h$ $$A'\otimes_A A^h_{p_{i_o}} \cong (A^h_{p_{i_o}})^s$$

$(ii)_h$ $$A'\otimes_A A^h_{p_i} \cong B\otimes_A A^h_{p_i} \quad , \ \forall i \in I-\{i_o\}$$

("h" pour "hensélisé").

Pour construire une telle K', on est ramené par [8] 3.12 (ii), à construire K' vérifiant, pour un entier $n \gg 0$ (le n "assez grand" étant déterminé par A, les p_i $(i \in I)$ et B) :

$$(i)_n \qquad A' \otimes_A (A/p_{i_o}^n) \cong (A/p_{i_o}^n)^s ,$$

$$(ii)_n \qquad A' \otimes_A (A/p_i^n) \cong B \otimes_A (A/p_i^n) , \ \forall i \in I-\{i_o\} ,$$

i.e. à trouver un polynôme

$$f(T) = T^s + a_1 T^{s-1} + \ldots + a_s \in A[T]$$

vérifiant :

$$(i)_n \qquad f(T) \equiv T^s \pmod{p_{i_o}^n},$$

$$(ii)_n \qquad f(T) \equiv g(T) \pmod{p_i^n} , \ \forall i \in I-\{i_o\} .$$

La conclusion résulte alors du lemme chinois (cf. [11] I, §3, Lemme d'approximation, p. 23).

Appendice. Variante d'un théorème de R. Elkik.

A.0. Nous allons montrer 6.2.3.6 ; la preuve est essentiellement la même que celle de [9] II, Thm. 2.

A.1. On commence par démontrer 6.2.3.6 avec l'hypothèse supplémentaire que C est complet pour la topologie $\mathcal{J}$-adique.

Pour cela, on raisonne par récurrence sur le nombre minimal d'un système de générateurs d'un idéal de définition de la topologie $\mathcal{J}$-adique de C ; on note ℓ ce nombre. Pour $\ell = 0$, il n'y a rien à faire, le résultat est trivial. Supposons donc le résultat démontré pour $\ell-1$ et soit $(t_1,\dots,t_\ell)$ un idéal de définition pour la topologie $\mathcal{J}$-adique de C ; on peut supposer et on supposera que $(t_1,\dots,t_\ell) \subset \mathcal{J}$. Soit alors

$$K = \{c \in C \mid t_1^n.c = 0 \text{ pour un } n \geqslant 0\}$$

et soit k un entier $\geqslant 0$ tel que

$$K \cap (t_1^k) = (0)$$

(l'existence d'un tel k résulte du théorème d'Artin-Rees) ; fixons alors un entier $n_1 \geqslant 0$ tel que

$$(t_1^{n_1}) \cap I \subset t_1^{n_1'}.I$$

où

$$n_1' > \sup(2e, e+k)$$

(m_1 existe toujours d'après Artin-Rees). Soient

$$C_1 = C/t_1^{n_1}$$

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}.C_1$$

$$I_1 = I.C_1 .$$

Par hypothèse de récurrence, il existe un couple d'entiers (m_o', r') faisant marcher 6.2.3.6 pour $(C_1, \mathcal{J}_1)$, I_1 et $e \geqslant 0$; on en déduit que, si $\underline{c}^o \in C^N$ vérifie, pour un entier $m \geqslant m_o'$,

$$J(\underline{c}^o) \subset \mathcal{J}^m I$$

et

$$H_D(\underline{c}^o) \supset \mathcal{J}^e ,$$

il existe $\underline{c}' \in C^N$ tel que

$$\underline{c}' \equiv \underline{c}^o \bmod \mathcal{J}^{m-r'}.I$$

et

$$J(\underline{c}') \subset (t_1^{n_1}) ;$$

pour ce $\underline{c}' \in C^N$, on a donc

$$J(\underline{c}') \subset (t_1^{n_1}) \cap (\mathcal{J}^{m-r'}I) ;$$

or, par Artin-Rees, il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que, si $m-r' > \lambda$, on ait

$$(t_1^{n_1}) \cap (\mathcal{J}^{m-r'}I) \subset \mathcal{J}^{m-r'-\lambda}(I \cap (t_1^{n_1}))$$

ou encore, vu le choix de n_1 ,

$$(t_1^{n_1}) \cap (\mathcal{J}^{m-r'}I) \subset t_1^{n_1'}.\mathcal{J}^{m-r'-\lambda}.I ,$$

par suite, si $m-r' > \lambda$, pour $\underline{c}' \in C^N$ comme ci-dessus, on a

$$J(\underline{c}') \subset t_1^{n_1'}.\mathcal{J}^{m-r'-\lambda}.I ;$$

on a aussi

$$(t_1^e) \subset \mathcal{J}^e \subset H_D(\underline{c}^o) \subset H_D(\underline{c}') + \mathcal{J}^{m-r'}.I \subset H_D(\underline{c}') + \mathcal{J}^{m-r'}$$

donc, si maintenant $m-r' > e$, il résulte du lemme de Nakayama que

$$H_D(\underline{c}') \supset (t_1^e) .$$

En résumé, on a établi ci-dessus le point suivant : si $\underline{c}^o \in C^N$ vérifie, pour un entier

$$m \geqslant \sup(m_o', r'+\lambda+1, r'+e+1) ,$$

les conditions

$$J(\underline{c}^o) \subset \mathcal{J}^m I$$

et

$$H_D(\underline{c}^o) \supset \mathcal{J}^e$$

alors, il existe $\underline{c}' \in C^N$ qui lui vérifie

$$\underline{c}' \equiv \underline{c}^{o} \bmod \mathcal{J}^{m-r'}.I$$

$$J(\underline{c}') \subset (t_1)^{n_1'}\mathcal{J}^{m-r'-\lambda}I$$

et

$$H_D(\underline{c}') \supset (t_1)^{e} .$$

D'après [9] I, lemme 1, appliqué à C qui est complet pour la topologie (t_1)-adique) et à $I := \mathcal{J}^{m-r'-\lambda}.I$, il existe, puisque

$$n_1' \rangle \sup(2e,e+k) ,$$

$\underline{c} \in C^N$ vérifiant

$$\underline{c} \equiv \underline{c}' \bmod (t_1)^{n_1'-e}\ \mathcal{J}^{m-r'-\lambda}I$$

et

$$J(\underline{c}) = 0 ;$$

or

$$(t_1)^{n_1'-e}.\mathcal{J}^{m-r'-\lambda}.I \subset \mathcal{J}^{m+n_1'-r'-\lambda-e}.I$$

donc

$$\underline{c} \equiv \underline{c}^{o} \bmod (\mathcal{J}^{m-r'}+\mathcal{J}^{m+n_1'-r'-\lambda-e})I$$

et le couple (m_o,r) défini par

$$r = \sup(r',r'+\lambda+e-n_1')$$

et

$$m_o = \sup(r,m_o',r'+\lambda+1,r'+e+1)$$

fait marcher 6.2.3.6 pour $(C,\mathcal{J})$, I et $e \geqslant 0$.

A.2. Prouvons maintenant 6.2.3.6 dans le cas général.

Soit $(\hat{C},\hat{\mathcal{J}})$ le complété $\mathcal{J}$-adique de $(C,\mathcal{J})$, soit $\hat{I} = I.\hat{C}$ et soit $(\hat{m}_o,\hat{r})$ un couple d'entiers faisant marcher 6.2.3.6 pour $(\hat{C},\hat{\mathcal{J}})$, $\hat{I}$ et $e \geqslant 0$ (cf. A.1).

Soit $\underline{c}^{o} \in C^N$ vérifiant, pour un entier $m \geqslant \hat{m}_o$, les conditions

$$J(\underline{c}^{o}) \subset \mathcal{J}^{m}.I$$

et

$$H_D(\underline{c}^{o}) \supset \mathcal{J}^{e}$$

alors, d'après A.1, il existe $\underline{\hat{c}} \in \hat{C}^N$ vérifiant

$$\underline{\hat{c}} \equiv \underline{c}^o \bmod \hat{\mathcal{J}}^{m-\hat{r}}\hat{I}$$

et

$$J(\underline{\hat{c}}) = 0 \ ;$$

on a alors, pour ce $\underline{\hat{c}}$,

$$\hat{\mathcal{J}}^e \subset H_D(\underline{c}^o).\hat{C} \subset H_D(\underline{\hat{c}}) + \hat{\mathcal{J}}^{m-\hat{r}}\hat{I}$$

donc, a fortiori

$$\hat{\mathcal{J}}^e \subset H_D(\underline{\hat{c}}) + \hat{\mathcal{J}}^{m-r}$$

et, donc, si $m-\hat{r} > e$, le lemme de Nakayama fournit l'inclusion

$$H_D(\underline{\hat{c}}) \supset \hat{\mathcal{J}}^e$$

et donc, a fortiori, l'inclusion

$$H_D(\underline{\hat{c}}) \supset (\hat{\mathcal{J}}.\hat{I})^e \ .$$

Maintenant, on remarque que $(C,\mathcal{J}I)$ est encore un couple hensélien, de complété $(\hat{C},\hat{\mathcal{J}}\hat{I})$; par suite, soit (m_o,r) le couple d'entiers défini par

$$m_o = \sup(\hat{m}_o, e+\hat{r}+1)$$

$$r = \hat{r}$$

et soit $\underline{c}^o \in C^N$ vérifiant, pour $m \geqslant m_o$

$$J(\underline{c}^o) \subset \mathcal{J}^m.I$$

et

$$H_D(\underline{c}^o) \supset \mathcal{J}^e \ ,$$

de sorte qu'il existe $\underline{\hat{c}} \in \hat{C}^N$ vérifiant

$$\underline{\hat{c}} \equiv \underline{c}^o \bmod \hat{\mathcal{J}}^{m-r}\hat{I}$$

$$J(\hat{c}) = 0$$

et

$$H_D(\underline{\hat{c}}) \supset \hat{\mathcal{J}}^e \ ;$$

alors, [9] II, Thm. 2bis dit qu'il existe $\underline{c} \in C^N$ tel que

$$\underline{c} \equiv \hat{\underline{c}} \mod (\hat{\mathcal{J}}\hat{I})^{m-r}$$

et

$$J(\underline{c}) = 0 ;$$

on a

$$\underline{c} \equiv \underline{c}^o \mod \hat{\mathcal{J}}^{m-r}\hat{I} + (\hat{\mathcal{J}}\hat{I})^{m-r}$$

donc

$$\underline{c} \equiv \underline{c}^o \mod \hat{\mathcal{J}}^{m-r}\hat{I}$$

donc

$$\underline{c} \equiv \underline{c}^o \mod \mathcal{J}^{m-r}I$$

car $\underline{c}$ et $\underline{c}^o$ sont dans C^N et (m_o,r) fait marcher 6.2.3.6 pour $(C,\mathcal{J})$, I et $e \geqslant 0$.

Complément de bibliographie

[8] M. ARTIN.- Algebraic Approximation of Structures over Complete Local Rings. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n° 36 (1969) p. 23-58.

[9] R. ELKIK.- Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. Annales scientifiques de l'E.N.S., 4e série, t. 6, fasc. 4 (1973) p. 553-604.

[10] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ.- Eléments de Géométrie Algébrique IV (quatrième partie). Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n° 32 (1967).

[11] J.-P. SERRE.- Corps locaux. Deuxième édition revue et corrigée, Hermann (1968).

[12] G. LAUMON.- Caractéristiques d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface. Conférence de Luminy, juillet 1981, à paraître dans la collection Astéristique.

COMPARAISON DE CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ EN COHOMOLOGIE ℓ-ADIQUE

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (19 janvier 1981) Série I – 209

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. – *Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie l-adique.* Note (*) de **Gérard Laumon,** présentée par Pierre Deligne.

Nous démontrons l'égalité des caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ordinaire et en cohomologie à supports propres pour un $\mathbf{Q}_l$-faisceau sur un schéma séparé et de type fini sur un corps algébriquement clos, et en donnons une variante relative pour des images directes virtuelles. Ce résultat, établi par Grothendieck pour les courbes ([4], 7.12) en toute caractéristique et, en caractéristique nulle, en toute dimension, a été obtenu récemment par O. Gabber, indépendamment et par une méthode différente de la nôtre (non publié).

We prove the equality of Euler-Poincaré characteristics in ordinary cohomology and cohomology with compact supports for any $\mathbf{Q}_l$-sheaf on a scheme separated and of finite type, over an algebraically closed field, and give a relative variant for virtual direct images. This result, established by Grothendieck for curves in arbitrary characteristic ([4], 7.12) and in any dimension in characteristic zero, has been recently obtained by O. Gabber independently and by a different method (unpublished).

1. ÉNONCÉ DU THÉORÈME. – Fixons un corps k, un nombre premier l, distinct de l'exposant caractéristique p de k, et une extension finie E_λ de $\mathbf{Q}_l$. Pour tout schéma T, nous noterons $K(T, E_\lambda)$ [ou $K(T)$] l'anneau de Grothendieck de la catégorie des E_λ-faisceaux sur T; pour tout E_λ-faisceau $\mathscr{F}$ sur T, nous désignerons par $[\mathscr{F}]$ sa classe dans $K(T)$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de k-schémas séparés de type fini, on dispose [2] d'homomorphismes de groupes $f_*, f_! : K(X) \to K(Y)$ et d'un homomorphisme d'anneaux $f^* : K(Y) \to K(X)$ tels que, pour tout E_λ-faisceau $\mathscr{F}$ sur X et tout E_λ-faisceau $\mathscr{G}$ sur Y :

$$f_*[\mathscr{F}] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i [R^i f_* \mathscr{F}], \qquad f_![\mathscr{F}] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i [R^i f_! \mathscr{F}]$$

et :

$$f^*[\mathscr{G}] = [f^* \mathscr{G}].$$

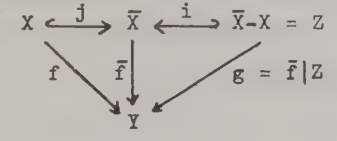
Pour tout schéma T, notons $E_\lambda(1)$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 de Tate sur T et, pour tout entier n et tout E_λ-faisceau $\mathscr{F}$ sur T, soit $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes E_\lambda(1)^{\otimes n}$. Nous noterons $K(T, E_\lambda)^\sim$ [ou $K(T)^\sim$] le quotient de l'anneau $K(T)$ par l'idéal engendré par $[E_\lambda(1)] - [E_\lambda]$ et $x \mapsto x^\sim$ la projection canonique de $K(T)$ sur $K(T)^\sim$. Pour tout E_λ-faisceau $\mathscr{F}$ sur T et pour tout entier n, on a donc $[\mathscr{F}(n)]^\sim = [\mathscr{F}]^\sim$. Dans le cas particulier où T est un k-schéma, k étant supposé algébriquement clos, on a $E_\lambda(1) \simeq E_\lambda$ et par suite $K(T)^\sim = K(T)$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de k-schémas séparés de type fini, $f_* : K(X) \to K(Y)$ induit un homomorphisme de groupes, que nous noterons encore $f_* : K(X)^\sim \to K(Y)^\sim$.

THÉORÈME 1.1. – *Soient* X, Y *deux k-schémas séparés de type fini et* $f : X \to Y$ *un k-morphisme. Pour tout* $x \in K(X)$, *on a* $(f_* x)^\sim = (f_! x)^\sim$

COROLLAIRE 1.2. – *Si k est algébriquement clos; pour tout k-schéma séparé de type fini* X *et pour tout* E_λ*-faisceau* $\mathscr{F}$ *sur* X, *on a* $\chi(X, \mathscr{F}) = \chi_c(X, \mathscr{F})$.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1.

2.1. Soit :



une compactification de f ($\bar{f}$ propre, j immersion ouverte). Pour tout $x \in K(X)$, on a :

$$f_* x - f_! x = g_* i^* j_* x;$$

on doit donc montrer que $(g_* i^* j_* x)^\sim (= g_* (i^* j_* x)^\sim) = 0$.

Quitte à éclater Z dans $\overline{X}$, on peut supposer que Z est localement défini par une équation dans $\overline{X}$: on va alors montrer que, pour tout $x \in K(X)$:

$$(i^* j_* x)^{\sim} = 0.$$

Soit $(Z_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert fini de Z par des Z_α ayant la propriété suivante : il existe un ouvert $\overline{X}_\alpha$ de $\overline{X}$ tel que $Z_\alpha = Z \cap \overline{X}_\alpha$ et que Z_α soit défini par une équation dans $\overline{X}_\alpha$: pour toute partie non vide B de A, $Z_B = \bigcap_{\alpha \in B} Z_\alpha$ est défini par une équation dans $\overline{X}_B = \bigcap_{\alpha \in B} \overline{X}_\alpha$ et, si on note :

$$\begin{array}{ccccc} X_B = \overline{X}_B - Z_B & \xrightarrow{j_B} & \overline{X}_B & \xleftarrow{i_B} & Z_B \\ \downarrow u_B & & \downarrow \overline{u}_B & & \downarrow v_B \\ X & \xrightarrow{j} & \overline{X} & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

les inclusions, on a, pour tout $x \in K(X)$:

$$i^* j_* x = \sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|-1} v_{B_*} i_B^* j_{B_*} u_B^* x;$$

par suite, si l'on montre que, pour toute partie non vide B de A et pour tout $x_B \in K(X_B)$, $(i_B^* j_{B_*} x_B)^{\sim} = 0$, on aura obtenu le résultat cherché.

On est donc ramené à prouver l'assertion suivante :

($\star$) si $h : T \to \mathbf{A}_k^1$ est un morphisme séparé de type fini, de fibre T_0 en 0, si :

$$T - T_0 \xhookrightarrow{j} T \xhookleftarrow{i} T_0$$

sont les inclusions, on a, pour tout $x \in K(T - T_0)$, $(i^* j_* x)^{\sim} = 0$.

2.2. L'assertion ($\star$) résulte, par localisation en 0 sur $\mathbf{A}_k^1$, de la proposition plus générale suivante :

Proposition 2.2.1. — *Soit* S *un trait hensélien de point fermé* $s = \mathrm{Spec}(k)$ *et de point générique* η. *Soit* $h : T \to S$ *un morphisme séparé de type fini de fibre* T_s (*resp.* T_η) *en* s (*resp.* η). *Notons* $T_\eta \xhookrightarrow{j} T \xhookleftarrow{i} T_s$ *les inclusions et* $i^* j_* : K(T_\eta) \to K(T_s)$ *l'homomorphisme de groupes caractérisé par :*

$$i^* j_* [\mathscr{F}] = \sum_{q \geq 0} (-1)^q [i^* R^q j_* \mathscr{F}],$$

pour tout E_λ*-faisceau* $\mathscr{F}$ *sur* T_η ([2], 3.11). *Alors, pour tout* $x \in K(T_\eta)$, *on a :*

$$(i^* j_* x)^{\sim} = 0.$$

2.2.2. Commençons par calculer $i^* j_* x$ à l'aide de la théorie des cycles évanescents pour le morphisme h [3].

Soit s_1 un point géométrique au-dessus de s, soit S_1 le localisé strict de S en s_1, soit η_1 le point générique de S_1 et soit $\overline{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η_1. Alors, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ se décompose comme suit :

$$1 \to I \to \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta) \to \mathrm{Gal}(s_1/s) \to 1,$$

$$1 \to P \to I \xrightarrow{t} \hat{\mathbf{Z}}_{(p')}(1) \to 1,$$

où $I = \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta_1)$ est le groupe d'inertie, P un pro-p-groupe et $\hat{\mathbf{Z}}_{(p')}(1) = \prod_{l \neq p} \mathbf{Z}_l(1)$.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (19 janvier 1981) Série I – 211

Appelons $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-$E_\lambda$-faisceaux sur T_s les E_λ-faisceaux sur $T_{s_1}=T_s\times_s s_1$ munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$, compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(s_1/s)$ sur T_{s_1}, et soit $K(T_s, \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta))$ le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-$E_\lambda$-faisceaux. Les E_λ-faisceaux sur T_s s'identifient aux $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-$E_\lambda$-faisceaux sur lesquels $I\subset\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ agit trivialement, de sorte que l'on définit un homomorphisme de groupes :

$$(-)^I:\quad K(T_s, \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta))\to K(T_s)$$

en posant, pour tout $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-$E_\lambda$-faisceau $\mathscr{G}$:

$$[\mathscr{G}]^I=\sum_{q\geq 0}(-1)^q[\mathscr{H}^q(I,\mathscr{G})]$$

D'autre part, la théorie des cycles évanescents ([3] et [2], 3.2) nous donne un homomorphisme de groupes :

$$\psi_\eta:\quad K(T_\eta)\to K(T_s, \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta))$$

avec, pour tout E_λ-faisceau $\mathscr{F}$ sur T_η :

$$\psi_\eta([\mathscr{F}])=\sum_{q\geq 0}(-1)^q[R^q\psi_\eta(\mathscr{F})].$$

On a alors, pour tout $x\in K(T_\eta)$:

$$i^*j_*x=(\psi_\eta(x))^I \tag{2.2.2.1}$$

[en effet, on a la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$E_2^{pq}=\mathscr{H}^p(I, R^q\psi_\eta(-))\Rightarrow i^*R^{p+q}j_*(-)].$$

La proposition résulte de (2.2.2.1) et du lemme suivant :

Lemme 2.2.3. – *Pour tout* $y\in K(T_s, \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta))$, *on a* $(y^I)\hat{}=0$.

Soit $\mathscr{G}$ un $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-$E_\lambda$-faisceau sur T_s, on doit montrer que :

$$\sum_{q\geq 0}(-1)^q[\mathscr{H}^q(I,\mathscr{G})]\hat{}=0.$$

Comme $\mathscr{H}^q(I,\mathscr{G})=\mathscr{H}^q(\hat{\mathbf{Z}}_{(p')}(1), \mathscr{G}^P)$ et $\mathscr{G}_P\xrightarrow{\sim}\mathscr{G}^P$, on a (*cf.* [5]) :

$$\mathscr{H}^q(I,\mathscr{G})=\begin{cases}\mathscr{G}^I & \text{si } q=0,\\ \mathscr{G}_I(-1) & \text{si } q=1,\\ 0 & \text{si } q\geq 2.\end{cases}$$

Par suite, on doit montrer que :

$$[\mathscr{G}^I]\hat{}=[\mathscr{G}_I(-1)]\hat{}\,(=[\mathscr{G}_I]\hat{}).$$

Si k est algébriquement clos et si σ est un générateur topologique de $\hat{\mathbf{Z}}_{(p')}(1)$, on a la suite exacte :

$$0\to\mathscr{G}^I\to\mathscr{G}^P\xrightarrow{\sigma^*-1}\mathscr{G}^P\to\mathscr{G}_I\to 0$$

et le lemme est démontré.

Dans le cas général, P. Deligne m'a indiqué l'argument suivant : on commence par remarquer que les $\mathscr{H}^q(I, \mathscr{G})$ ne changent pas si l'on remplace $\mathscr{G}$ par son plus grand sous-$\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$-$E_\lambda$-faisceau sur lequel I agit de façon unipotente [fibre par fibre, c'est le sous-espace propre généralisé pour la valeur propre 1 d'un générateur topologique arbitraire de $\hat{\mathbf{Z}}_{(p')}(1)$, dans la partie fixe par P]. On peut donc supposer que l'action de I sur $\mathscr{G}$ est unipotente; il existe alors un endomorphisme nilpotent :

$$N : \mathscr{G} \to \mathscr{G}(-1)$$

tel que, pour tout $\sigma \in I$, l'action de σ sur $\mathscr{G}$ soit donnée par $\exp(N . t_l(\sigma))$, où $t_l : I \to \mathbf{Z}_l(1)$ est la l-ième composante de t. On a :

$$\mathscr{G}^1 = \mathrm{Ker}\, N, \qquad \mathscr{G}_1(-1) = \mathrm{Coker}\, N.$$

De plus, on dispose de la filtration par la monodromie ([1], 1.6.1) :

$$\ldots \subset M_i \mathscr{G} \subset M_{i+1} \mathscr{G} \subset \ldots$$

caractérisée par $N M_i \subset M_{i-2}(-1)$ et par le fait que N^i induise un isomorphisme :

$$\mathrm{Gr}_i^M \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{-i}^M \mathscr{G}(-i)$$

pour tout $i \geqq 0$. Comme $N : (\mathscr{G}, M_\cdot) \to (\mathscr{G}, M_{\cdot-2})(-1)$ est strictement compatible aux filtrations ([1], 1.6.5), on a, pour tout i, un isomorphisme :

$$\mathrm{Gr}_i^M(\mathrm{Coker}\, N)(i) \simeq \mathrm{Gr}_{-i}^M(\mathrm{Ker}\, N)$$

donc, $[\mathrm{Ker}\, N]\tilde{} = [\mathrm{Coker}\, N]\tilde{}$ et le lemme est démontré.

(*) Remise le 5 janvier 1981.

[1] P. Deligne, *La conjecture de Weil*. II, Publ. Math. I.H.E.S., n° 52, 1981, p. 313-428.

[2] P. Deligne, *Cohomologie etale* (SGA 4 1/2) [Th. Finitude] (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 569, Springer-Verlag, 1977, p. 233-261).

[3] P. Deligne, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* (SGA 7), XIII (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 340, Springer-Verlag, 1973, p. 82-115).

[4] A. Grothendieck, *Cohomologie l-adique et fonctions* L (SGA 5), X (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 589, Springer-Verlag, 1977, p. 372-406).

[5] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne* (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 5, Springer-Verlag, 1964).

Département de Mathématiques, Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay*.

MAJORATION DE SOMMES EXPONENTIELLES ATTACHÉES AUX HYPERSURFACES DIAGONALES

0. Introduction.

Ce travail, dont l'idée m'a été suggérée par N.M. Katz, a pour origine un article de C. Hooley sur les nombres qui sont représentables comme somme de deux cubes [4]. Hooley étudie la somme exponentielle

$$S_1(p;\alpha,\beta) = \sum_{\xi^3+\eta^3=1+\zeta^2} e^{\frac{2\pi i}{p}(\alpha\xi+\beta\eta)} \qquad (\xi,\eta,\zeta \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

pour $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$. Il montre que, pour $\alpha \not\equiv 0$, $\alpha \not\equiv \beta \pmod p$ et pour $p \equiv 2 \pmod 3$, on a

$$S_1(p;\alpha,\beta) = O(p) \ .$$

Nous étudierons ici, plus généralement, les sommes exponentielles de la forme

$$S(p) = \sum_{1+c_1y_1^{d_1}+\ldots+c_my_m^{d_m}=0} e^{\frac{2\pi i}{p}(a_1y_1+\ldots+a_my_m)} \qquad (y_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

où $m,d_1,\ldots,d_m$ sont des entiers strictement positifs, $c_1,\ldots,c_m$, $a_1,\ldots,a_m \in \mathbb{Z}$ et p est un nombre premier. Notre résultat principal est que, si les a_i et c_i $(i = 1,\ldots,m)$ sont suffisamment généraux, on a, pour presque tout p ,

$$|S(p)| \leqslant A(\sqrt{p})^{m-1} \qquad (0.1)$$

où A est une constante indépendante de p , qui est un polynôme en les d_i (voir (4.1) et (4.2) pour des énoncés précis).

Nous établissons ce théorème par voie ℓ-adique, en suivant la méthode exposée par P. Deligne dans SGA 4½ [Sommes trig.]. Pour résoudre la difficulté posée par la compactification des hypersurfaces diagonales, on exploite, selon une suggestion de N.M. Katz,

le fait qu'une hypersuface diagonale est quotient d'une hypersurface de Fermat et les relations qui en découlent entre les sommes $S(p)$ et d'autres sommes attachées aux hypersurfaces de Fermat.

Voici, brièvement, le contenu de cet article. Les numéros 1, 2 et 3 rappellent les résultats généraux de P. Deligne [1]. Le numéro 4 contient les énoncés précis de majorations des sommes $S(p)$. Aux numéros 5,6,7 et 8, on établit la "pureté" des sommes $S(p)$, et en particulier le fait que l'on a $S(p) = O((\sqrt{p})^{m-1})$ en s'inspirant de certains calculs de P. Deligne [8]. Signalons que le numéro 8 consiste essentiellement en une traduction cohomologique de résultats de A. Weil [11], à l'aide du "produit de convolution" de P. Deligne [2]. La constante A de (0.1) est calculée aux numéros 9 et 10, par la méthode de fibration du cours de N.M. Katz [7].

Je tiens à remercier en premier lieu L. Illusie qui m'a initié à la recherche, qui a patiemment dirigé ce travail et qui a apporté de nombreuses améliorations à la rédaction finale de cet article. Je tiens à remercier N.M. Katz de m'avoir posé ce problème et P. Deligne de m'avoir accordé de fructueux entretiens. Je voudrais remercier aussi M. Giusti, M. Merle et B. Tessier qui m'ont aidé à démontrer l'énoncé 9.2. Je remercie enfin Mme Bonnardel qui a réalisé avec diligence et avec beaucoup de soin la frappe du manuscrit.

1. Notations (cf. [1]).

Soient p un nombre premier, q une puissance de p, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique du corps premier $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_{q^n}$ le corps fini à q^n éléments dans $\mathbb{F}$.

Soient ℓ un nombre premier distinct de p, E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Si $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$ (resp. $\chi : \mathbb{F}_q^* \longrightarrow E_\lambda^*$) est un caractère additif (resp. multiplicatif), on notera $\psi_n : \mathbb{F}_{q^n} \longrightarrow E_\lambda^*$ (resp. $\chi_n : \mathbb{F}_{q^n}^* \longrightarrow E_\lambda^*$) le composé de ψ (resp. χ) et de la trace (resp. la norme) de $\mathbb{F}_{q^n}$ à $\mathbb{F}_q$.

On désignera par un symbole affecté d'un indice $_0$ un objet (schéma, morphisme, faisceau,...) sur $\mathbb{F}_q$; le même symbole sans $_0$ désigne alors l'objet qui s'en déduit par extension des scalaires à $\mathbb{F}$.

Si X_0 est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, le morphisme de Frobenius F_0 de X_0 est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et l'élévation à la puissance q-ième sur le faisceau structural. Alors F agit sur $X(\mathbb{F})$ comme $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ défini par $\varphi(x) = x^q$ $(\forall x \in \mathbb{F})$; en particulier $X^{F^n} = X_0(\mathbb{F}_{q^n})$.

Si X_0 est un schéma séparé et de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et si $\mathcal{F}_0$ est un E_λ-faisceau sur X_0, on dispose de la correspondance de Frobenius

$$F_0^* : F_0^* \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_0$$

d'où résulte une action de F sur $H_c^*(X, \mathcal{F})$, que l'on notera F^*.

2. Torseurs de Lang et de Kummer (cf. [1]).

2.0. Soient A un groupe fini et X un schéma. Soit

$$\begin{array}{c} T \\ \pi \downarrow \\ X \end{array} \quad A \tag{2.0.1}$$

un A-torseur sur X, i.e. un X-schéma étale T muni d'une action à droite de A tel que le morphisme $(t,a) \longmapsto (t,ta)$ de $T \times A$ dans $T \times_X T$ soit un isomorphisme. Soit $\mathcal{T}$ le faisceau pour la topologie étale sur X représenté par T ; $\mathcal{T}$ est muni d'une action à droite de A et, localement pour la topologie étale sur X, $\mathcal{T}$ est isomorphe au faisceau constant A sur lequel A agit par translation à droite.

Pour un A-torseur (2.0.1) et une représentation linéaire $\rho : A \longrightarrow GL(V)$ où V est un vectoriel de dimension finie sur E_λ, il existe à isomorphisme unique près un seul E_λ-faisceau, lisse de rang $\dim(V)$, noté $\rho(\mathcal{T})$, muni d'un morphisme de faisceaux

$$\rho : \mathcal{T} \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, \rho(\mathcal{T})) \tag{2.0.2}$$

tel que $\rho(ta) = \rho(t) \circ \rho(a)$ pour toute section t de $\mathcal{T}$ et tout $a \in A$.

Dans le cas particulier où $V = E_\lambda[A]$ et où ρ est la représentation régulière de A (A agit par translation à droite sur A), le E_λ-faisceau $\rho(\mathcal{T})$ n'est autre que $\pi_* E_\lambda$ où $\pi : T \longrightarrow X$ est la projection du A-torseur.

Nous supposerons E_λ assez gros pour que toute représentation linéaire de A soit réalisable sur E_λ (cf. [10] 12.3) et alors nous noterons $\hat{A}$ l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de A sur des E_λ-espaces vectoriels de dimension finie. Toute représentation ρ de A sur un E_λ-espace vectoriel

de dimension finie V admet une décomposition canonique (cf. [10] 2.6)

$$(2.0.3) \qquad \rho = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} \rho_\chi \quad , \quad V = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} V_\chi$$

et le projecteur p_χ de V sur V_χ associé à cette décomposition est donné par la formule

$$(2.0.4) \qquad p_\chi = \frac{n_\chi}{|A|} \sum_{a \in A} \chi(a^{-1})\, \rho(a) \ ,$$

où n_χ est le degré de χ et $|A|$ est le cardinal de A . Il en résulte aussitôt une décomposition canonique

$$(2.0.5) \qquad \rho(\mathfrak{I}) = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} \rho_\chi(\mathfrak{I}) \ .$$

Dans le cas particulier de la représentation régulière $\rho : A \longrightarrow GL(E_\lambda[A])$, le rang de chaque E_λ-faisceau $\rho_\chi(\mathfrak{I})$ est alors $\dim(V_\chi) = n_\chi^2$.

Supposons maintenant A commutatif, alors $\hat{A}$ est aussi le groupe des homomorphismes $\chi : A \longrightarrow E_\lambda^*$, i.e. des représentations de degré 1 de A , et dans la décomposition (2.0.5) pour la représentation régulière $\rho : A \longrightarrow GL(E_\lambda[A])$, on a $\rho_\chi(\mathfrak{I}) = \chi(\mathfrak{I})$. Par suite, on a une décomposition canonique

$$(2.0.6) \qquad \pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} \chi(\mathfrak{I}) \ .$$

2.1. Soit G_o un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{F}_q$, le <u>torseur de Lang</u> est le $G_o(\mathbb{F}_q)$-torseur sur G_o défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow G_o(\mathbb{F}_q) \longrightarrow G_o \xrightarrow{L} G_o \longrightarrow 0$$

où $L : x \longmapsto Fx - x$ est l'isogénie de Lang (la loi de groupe de G_o est notée additivement). Pour $G_o = \mathbb{G}_a$ le torseur de Lang est le $\mathbb{F}_q$-torseur défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{x \longmapsto x^q - x} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0 \ .$$

On notera $\mathcal{L}_o$ le faisceau pour la topologie étale sur G_o représenté par le torseur de Lang.

Si $\psi : G_o(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E_\lambda^*$ est un caractère et si $f_o : X_o \longrightarrow G_o$ est un morphisme de schémas sur $\mathbb{F}_q$ (X_o séparé, de type fini sur $\mathbb{F}_q$), on note

(2.1.1) $$\mathcal{L}(\psi, f_o)$$

le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur X_o image réciproque par f_o du E_λ-faisceau, $\psi^{-1}(\mathcal{L}_o)$, lisse de rang 1 sur G_o.

Le E_λ-faisceau $\mathcal{L}(\psi, f_o)$ est caractérisé par le fait que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in X^{F^n}$, $F_{o,x}^*$ agit sur $\mathcal{L}(\psi, f_o)$ comme l'homothétie de rapport $\psi_n(f_o(x))$, où ψ_n est le composé de ψ et de la norme $G_o(\mathbb{F}_{q^n}) \longrightarrow G_o(\mathbb{F}_q)$.

Si $g_o : Y_o \longrightarrow X_o$ est un morphisme entre $\mathbb{F}_q$-schémas séparés de type fini, on a

(2.1.2) $$\mathcal{L}(\psi, f_o \circ g_o) = g_o^* \mathcal{L}(\psi, f_o) .$$

Si $f_o, g_o : X_o \longrightarrow G_o$ sont deux morphismes de schémas sur $\mathbb{F}_q$, on a

(2.1.3) $$\mathcal{L}(\psi, f_o + g_o) = \mathcal{L}(\psi, f_o) \otimes \mathcal{L}(\psi, g_o) .$$

Pour $G_o = \prod_{i \in I} G_o^i$, ψ de coordonnées ψ_i ($i \in I$), $X_o = \prod_{i \in I} X_o^i$ et $f_o = \prod_{i \in I} f_o^i$, on a

(2.1.4) $$\mathcal{L}(\psi, f_o) = \boxtimes_{i \in I} \mathcal{L}(\psi_i, f_o^i) .$$

On a aussi, pour tout $\mathbb{F}_q$-morphisme $f_o : X_o \longrightarrow G_o$

(2.1.5) $$\mathcal{L}(\psi, f_o)^\vee = \mathcal{L}(\psi^{-1}, f_o)$$

On notera $\mathcal{L}(\psi, f)$ l'image réciproque de $\mathcal{L}(\psi, f_o)$ sur $X = X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$.

2.2. Soient k un corps algébriquement clos, n un entier inversible dans k et G un groupe algébrique commutatif connexe sur k (noté multiplicativement). Notons G_n le noyau de l'élévation à la puissance n-ième dans G, $[n] : G \xrightarrow{x \mapsto x^n} G$. La suite

$$1 \longrightarrow G_n(k) \longrightarrow G \xrightarrow{[n]} G \longrightarrow 1$$

est exacte, donc définit un $G_n(k)$-torseur sur G, dit <u>torseur de Kummer</u>. Pour $G = \mathbb{G}_{m,k}$, le torseur de Kummer est le $\mu_n(k)$-torseur défini par la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_n(k) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k} \xrightarrow{[n]} \mathbb{G}_{m,k} \longrightarrow 1 .$$

On notera $\mathcal{K}_n$ le faisceau pour la topologie étale représenté par le torseur de Kummer.

Si $\chi : G_n(k) \longrightarrow E_\lambda^*$ est un caractère et si $f : X \longrightarrow G$ est un k-morphisme, on note

(2.2.1) $$\mathcal{K}_n(\chi, f)$$

le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur X image réciproque par f du E_λ-faisceau $\chi^{-1}(\mathcal{K}_n)$, lisse de rang 1 sur G.

Si $g : Y \longrightarrow X$ est un k-morphisme, on a

(2.2.2) $$\mathcal{K}_n(\chi, f \circ g) = g^* \mathcal{K}_n(\chi, f) .$$

Si $f, g : X \longrightarrow G$ sont deux k-morphismes, on a

(2.2.3) $$\mathcal{K}_n(\chi, f.g) = \mathcal{K}_n(\chi, f) \otimes \mathcal{K}_n(\chi, g) .$$

Pour tout entier d inversible dans k, on a

(2.2.4) $$\mathcal{K}_n(\chi, f^d) = \mathcal{K}_n(\chi^d, f)$$

et, si $\chi^{(d)} : G_{nd}(k) \longrightarrow E_\lambda^*$ est le composé de χ et de l'élévation à la puissance d-ième qui envoie $G_{nd}(k)$ dans $G_n(k)$, on a

(2.2.5) $$\mathcal{K}_{nd}(\chi^{(d)}, f) = \mathcal{K}_n(\chi, f) .$$

Pour deux caractères $\chi_1, \chi_2 : \mu_n(k) \longrightarrow E_\lambda^*$ et pour tout k-morphismes $f : X \longrightarrow G$, on a

$$\mathcal{K}_n(\chi_1 \cdot \chi_2, f) = \mathcal{K}_n(\chi_1, f) \otimes \mathcal{K}_n(\chi_2, f) \quad . \tag{2.2.6}$$

Pour $G = \coprod_{i \in I} G^i$, n un multiple commun des n_i $(i \in I)$, i.e. $n = n_i d_i$ (pour tout $i \in I$), χ de coordonnées $\chi_i^{(d_i)}$ $(i \in I)$ où $\chi_i : G^i_{n_i}(k) \longrightarrow E_\lambda^*$, $X = \coprod_{i \in I} X^i$ et $f = \coprod_{i \in I} f^i$, on a

$$\mathcal{K}_n(\chi, f) = \boxtimes_{i \in I} \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i, f_i) \quad . \tag{2.2.7}$$

Pour tout k-morphisme $f : X \longrightarrow G$, on a aussi

$$\mathcal{K}_n(\chi, f)^\vee = \mathcal{K}_n(\chi^{-1}, f) \quad . \tag{2.2.8}$$

Pour tout carré cartésien de k-morphismes

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & G \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [n]} \\ Y & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

la décomposition (2.0.6) de $[n]_* E_\lambda$ fournit par image réciproque sur Y , une décomposition canonique

$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G_n(k)}} \mathcal{K}_n(\chi, g) \quad . \tag{2.2.9}$$

REMARQUE 2.2.10. Soit $k_o \subset k$ un sous-corps sur lequel G est défini, i.e. tel que $G = G_o \otimes_{k_o} k$ pour un groupe algébrique G_o sur k_o . On suppose que

$$(G_o)_n(k_o) = (G_o)_n(k) = G_n(k) \quad . \tag{2.2.10.1}$$

Alors, pour tout caractère $\chi : G_n(k) \longrightarrow E_\lambda^*$ et pour tout k_o-morphisme $f_o : X_o \longrightarrow G_o$, le E_λ-faisceau $\mathcal{K}_n(\chi, f)$, où $f : X \longrightarrow G$ est le morphisme déduit de f_o par extension des scalaires de k_o à k , est l'image réciproque sur X d'un E_λ-faisceau sur X_o , noté

$$\mathcal{K}_n(\chi, f_o) \quad . \tag{2.2.10.2}$$

Pour tout carré cartésien de k_o-morphismes

$$\begin{array}{ccc} X_o & \xrightarrow{f_o} & G_o \\ {\scriptstyle \pi_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [n]} \\ Y_o & \xrightarrow{g_o} & G_o \end{array}$$

on a une décomposition canonique

$$(2.2.10.3) \qquad (\pi_o)_* E_\lambda = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G_n(k)}} \mathcal{K}_n(\chi, g_o)$$

dont l'image réciproque sur $Y = Y_o \otimes_{k_o} k$ n'est autre que (2.2.9).

Pour $k = \mathbf{F}$, $k_o = \mathbf{F}_q$ et $G = \mathbb{G}_m$, la condition (2.2.10.1) équivaut à la condition :

(2.2.10.4) L'entier n divise $q-1$.

3. Rappels sur les sommes trigonométriques (cf. [1]).

3.0. Soient G_o , $f_o : X_o \longrightarrow G_o$, $\theta : G_o(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E_\lambda^*$ comme en 2.1. La formule des traces pour la correspondance de Frobenius du couple $(X_o, \mathcal{L}(\theta, f_o))$ montre que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a (avec les notations de 2.1) :

$$(3.0.1) \qquad \sum_{x \in X_o(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_o(x)) = \mathrm{Tr}((F^*)^n, H_c^*(X, \mathcal{L}(\theta, f))) \ .$$

Rappelons qu'un nombre $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est dit pur de poids w $(w \in \mathbb{Z})$ si α est un nombre algébrique (i.e. appartient à la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$) et si pour toute valeur absolue $|\ |$ archimédienne sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, on a

$$\log_{\sqrt{q}} |\alpha| = w \ .$$

DÉFINITION 3.1. Soit w un entier $\geqslant 0$, les sommes trigonométriques

$$(3.1.1) \qquad \sum_{x \in X_o(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_o(x)) \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

seront dites pures de poids w s'il existe un ensemble fini $\mathcal{A}$ de nombres $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell$, purs de poids w , et, pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, un entier $m(\alpha) > 0$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait

$$(3.1.2) \qquad \sum_{x \in X_o(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_o(x)) = (-1)^w \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} m(\alpha) . \alpha^n \ .$$

Les sommes trigonométriques (3.1.1) seront dites pures si elles sont pures de poids w pour un certain entier $w \geqslant 1$ (la terminologie diffère de celle de [11] 3.6).

REMARQUE 3.1.3. Si les sommes trigonométriques (3.1.1) sont pures, l'entier $w \geqslant 1$ est caractérisé par

$$w = \log_{\sqrt{p}} \limsup_{n \to +\infty} \left| \sum_{x \in X_o(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_o(x)) \right|^{1/n}$$

quelle que soit la valeur absolue archimédienne $|\ |$ sur E_λ choisie (cf. [7]) ; c'est le poids des sommes (3.1.1).

REMARQUE 3.1.4. Si les sommes trigonométriques (3.1.1) sont pures de poids w, pour toute valeur absolue archimédienne $|\ |$ sur E_λ, on a (cf. [7])

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\left|\sum_{x\in X_o(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_o(x))\right|}{(\sqrt{q})^{nw}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} m(\alpha) .$$

Le critère fondamental de pureté ci-dessous est dû à Deligne ([1] 1.20).

CRITÈRE DE PURETÉ 3.2. *Soient X_o un schéma affine lisse purement de dimension m sur $\mathbb{F}_q$, G_o un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{F}_q$, $\theta : G_o(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère et $f_o : X_o \longrightarrow G_o$ un morphisme. On suppose que les applications canoniques*

$$H_c^i(X,\mathcal{L}(\theta,f)) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{L}(\theta,f)) \qquad (i \geqslant 0)$$

sont des isomorphismes. Alors les sommes trigonométriques

$$\sum_{x\in X_o(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_o(x))$$

sont pures de poids m et

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\left|\sum_{x\in X_o(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_o(x))\right|}{(\sqrt{q})^{mn}} = (-1)^m \chi_c(X,\mathcal{L}(\theta,f))$$

pour toute valeur absolue archimédienne $|\ |$ sur E_λ.

REMARQUE 3.2.1. Plus précisément, sous les hypothèses du critère, on a $H_c^i(X,\mathcal{L}(\theta,f)) = 0$ pour $i \neq m$ et les valeurs propres de F^* sur $H_c^m(X,\mathcal{L}(\theta,f))$ sont des entiers algébriques purs de poids m.

Rappelons enfin la proposition très utile suivante :

PROPOSITION 3.3. *Soient $\bar{X}$ un schéma propre sur un corps algébriquement clos k, $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ un ouvert et $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau sur X. On suppose que*

a) $(j_*\mathcal{F})_x = 0$ pour tout $x \in \bar{X}-X$,

b) $R^i j_*\mathcal{F} = 0$ pour tout $i > 0$.

Alors, les applications canoniques

$$H^i_c(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{F}) \qquad (i \geqslant 0)$$

sont des isomorphismes.

4. Enoncés des résultats.

4.0. Soit I un ensemble fini non vide, soit $(d_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers strictement positifs, soit $(c_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de de $\mathbf{F}_q$, $c_i \neq 0$ pour tout $i \in I$, et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbf{F}_q$, non tous nuls.

Soit $\psi : \mathbf{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère additif non trivial, on considère les sommes trigonométriques $(n \geqslant 1)$

$$(4.0.1) \qquad S_{I,n} = S_n = \sum_{1+\sum_{i\in I} c_i y_i^{d_i}=0} \psi_n\Big(\sum_{i\in I} a_i y_i\Big) \qquad (y_i \in \mathbf{F}_{q^n}).$$

Ces sommes sont attachées à la situation géométrique suivante : soit

$$(4.0.2) \qquad V_{I,o} = V_o$$

le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^I_{\mathbf{F}_q} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q[(y_i)_{i\in I}])$ d'équation

$$1 + \sum_{i\in I} c_i y_i^{d_i} = 0 ,$$

soit

$$(4.0.3) \qquad g_{I,o} = g_o : V_o \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{F}_q}$$

le morphisme défini par

$$g_o((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i$$

et soit

$$(4.0.4) \qquad \mathcal{G}_{I,o} = \mathcal{G}_o = \mathcal{L}(\psi, g_o) ,$$

$\mathcal{G}_o$ est donc un E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V_o.

La formule (3.0.1) donne, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(4.0.5) \qquad S_n = \mathrm{Tr}((F^*)^n, H_c^*(V, \mathcal{G})) .$$

4.0.6. Soient $1 < d_1 < d_2 < \ldots < d_N$ les valeurs distinctes prises par les d_i $(i \in I)$, soit d le p.p.c.m. des d_i $(i \in I)$ et soient $r_i = d/d_i$ $(i \in I)$, $r_\nu = d/d_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,N)$; pour tout $\nu = 1,\ldots,N$, posons

$$I_\nu = \{i \in I \mid d_i = d_\nu\} = \{i \in I \mid r_i = r_\nu\}$$

et

$$I'_\nu = \{i \in I_\nu \mid a_i \neq 0\} .$$

Il sera utile aussi de poser

$$I' = \bigcup_{\nu=1}^{N} I'_\nu = \{i \in I \mid a_i \neq 0\} .$$

Dans toute l'étude géométrique des sommes $S_{I,n}$, nous ferons les deux hypothèses suivantes :

(A) d <u>est premier à</u> p .

(B) <u>Pour tout</u> $\nu = 1,\ldots,N$, <u>tel que</u> I'_ν <u>contienne au moins deux éléments</u>, <u>les deux cônes de</u> $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{I'_\nu} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i \in I'_\nu}])$ <u>d'équations</u>

$$\sum_{i \in I'_\nu} a_i x_i^{r_\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I'_\nu} c_i x_i^{d} = 0$$

<u>sont transverses en dehors de l'origine</u>.

Nos résultats principaux sont les suivants :

THÉORÈME 4.1 (<u>Pureté</u>). <u>Sous les hypothèses</u> (A) <u>et</u> (B) <u>les sommes trigonométriques</u> S_n <u>sont pures de poids</u> $\mathrm{card}(I)-1$. <u>Plus précisément, pour tout</u> $i \in \mathbb{N}$, $i \neq \mathrm{card}(I)-1$, <u>on a</u>

$$H_c^i(V, \mathcal{L}) = 0$$

<u>et, si</u> $\mathcal{A}$ <u>est l'ensemble des valeurs propres de Frobenius agissant sur</u> $H_c^i(V, \mathcal{L})$ <u>pour</u> $i = \mathrm{card}(I)-1$, <u>et si</u> $m(\alpha)$ <u>est la multiplicité de la valeur propre</u> α , <u>chaque</u> $\alpha \in \mathcal{A}$ <u>est pur de poids</u> $\mathrm{card}(I)-1$, <u>on a</u>

$$S_n = (-1)^{\mathrm{card}(I)-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} m(\alpha).\alpha^n$$

et

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} m(\alpha) = (-1)^{\mathrm{card}(I)-1}\,\chi_c(V,\mathcal{C}) \ .$$

THÉORÈME 4.2 (Valeur de la constante). Sous les hypothèses (A) et (B), on a

$$\chi_c(V,\mathcal{C}) = (-1)^{\mathrm{card}(I)-1}\,\frac{\prod_{i\in I}(d_i-1)}{d_{\nu_o}-1}\,d_{\nu_o} \ ,$$

où ν_o est le plus petit indice $\nu\in\{1,\dots,N\}$ tel que $I'_\nu\neq\emptyset$ (cf. 4.0.6).

COROLLAIRE 4.3. Sous les hypothèses (A) et (B), pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et toute valeur absolue archimédienne $||$ sur E_λ, on a la majoration

$$|S_n| \leqslant \frac{\prod_{i\in I}(d_i-1)}{d_{\nu_o}-1}\,d_{\nu_o}\,(\sqrt{q})^{n(\mathrm{card}(I)-1)} \ ,$$

où ν_o est le plus petit indice $\nu\in\{1,\dots,N\}$ tel que $I'_\nu\neq\emptyset$ (cf. 4.0.6).

REMARQUE 4.3.0. Les énoncés 4.1 et 4.2 étant de nature géométrique, on peut, pour les démontrer, supposer que tous les c_i sont égaux à 1 (il suffit d'effectuer le changement de variable $y_i \longmapsto c_i^{1/d_i} y_i$ pour se ramener à ce cas).

REMARQUE 4.3.1. On peut déduire de 4.3 un énoncé de majoration des sommes S_n qui vaut aussi pour des d_i non nécessairement premiers à p. Supposons $q=p$ (pour simplifier) et décomposons les d_i $(i\in I)$ en

$$d_i = p^{s_i}.\bar{d}_i \ ,$$

avec $s_i\in\mathbb{N}$, $\bar{d}_i\in\mathbb{N}^*$ et $(p,\bar{d}_i)=1$. Soient $1\leqslant\bar{d}_1<\bar{d}_2<\dots<\bar{d}_{\bar{N}}$ les valeurs distinctes prises par les $\bar{d}_i$ $(i\in I)$, soit $\bar{d}$ le p.p.c.m. des $\bar{d}_i$ $(i\in I)$ et soient $\bar{r}_i=\bar{d}/\bar{d}_i$ $(i\in I)$, $\bar{r}_\nu=\bar{d}/\bar{d}_\nu$ $(\nu=1,\dots,\bar{N})$; pour tout $\nu=1,\dots,\bar{N}$, posons

$$\bar{I}_\nu = \{i \in I \mid \bar{d}_i = \bar{d}_\nu\} = \{i \in I \mid \bar{r}_i = \bar{r}_\nu\}$$

et

$$\bar{I}'_\nu = \{i \in \bar{I}_\nu \mid a_i \neq 0\} .$$

Faisons l'hypothèse suivante

($\bar{B}$) Pour tout $\nu = 1,\ldots,\bar{N}$, tel que $\bar{I}'_\nu$ contienne au moins deux éléments, les deux cônes de $\mathbb{A}^{\bar{I}'_\nu}_{\mathbb{F}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i\in\bar{I}'_\nu}])$ d'équations

$$\sum_{i\in\bar{I}'_\nu} a_i x_i^{\bar{r}_\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I'_\nu} c_i x_i^{\bar{d}} = 0$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Sous l'hypothèse ($\bar{B}$), pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute valeur absolue archimédienne $||$ sur E_λ, on a la majoration

$$|S_n| \leqslant \frac{\prod_{i\in I} (\bar{d}_i - 1)}{(\bar{d}_{\bar{\nu}_o} - 1)} \bar{d}_{\bar{\nu}_o} (\sqrt{p})^{n(\mathrm{card}(I)-1)}$$

où $\bar{\nu}_o$ est le plus petit indice $\nu \in \{1,\ldots,\bar{N}\}$ tel que $\bar{I}'_\nu \neq \emptyset$.

En effet, il suffit de remarquer que le changement de variable

$$z_i = y_i^{p^{s_i}} \qquad (i \in I)$$

permet de réécrire les sommes S_n sous la forme

$$S_n = \sum_{1 + \sum_{i\in I} c_i z_i^{\bar{d}_i} = 0} \psi_n\Big(\sum_{i\in I} a_i z_i\Big) \qquad (z_i \in \mathbb{F}_{q^n}).$$

Cependant, l'hypothèse (A) est fondamentale pour l'étude géométrique qui va suivre.

REMARQUE 4.3.2 (suggestion du referee). Soit $P \in \mathbb{Z}[y_1,\ldots,y_m]$ un polynôme isobare pour y_i de poids r_i/d ($i \in I$), d et $r_1,\ldots,r_m$ étant des entiers > 0 (par exemple, $P = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i^{d_i}$, $r_i/d = 1/d_i$) et soit $Q(x_1,\ldots,x_m) = P(x_1^{r_1},\ldots,x_m^{r_m})$ ($Q \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_m]$ est homogène de

degré d).

Supposons que l'hypersurface de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ d'équation

$$X_o^d + Q(X_1,\dots,X_m) = 0$$

est lisse. La méthode pour démontrer 4.1 développée ci-dessous devrait permettre d'exhiber un ouvert $U \neq \emptyset$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[a_1,\dots,a_m])$ ayant la propriété suivante : pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, pour tout $a \in U(\mathbb{F}_q)$, les sommes trigonométriques $(n \geqslant 1)$

$$S_n = \sum_{1+P(y_1,\dots,y_m)=0} \psi_n\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\Big) \qquad (y_i \in \mathbb{F}_{q^n})$$

sont pures de poids $m-1$.

4.4. Cas particuliers.

4.4.1. Si tous les d_i sont égaux, i.e. si $d_i = d$ $(\forall i \in I)$, considérons l'hypersurface projective lisse de Fermat, X, dans $\mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[X_o,(X_i)_{i\in I}])$ d'équation $\sum_{i\in I} X_i^d + X_o^d = 0$ et soit L (resp. H) l'hyperplan de $\mathbb{P}^I_{\mathbb{F}}$ d'équation $X_o = 0$ (resp. $\sum_{i\in I} a_i X_i = 0$). L'hypothèse (B) exprime simplement la transversalité H à $X \cap L$ et on a

$$\chi_c(V,\mathcal{G}) = d(1-d)^{\mathrm{card}(I)-1} = \chi_c(X-(X\cap L)) - \chi_c((X\cap L)-(X\cap L\cap H)) .$$

Par suite, nos énoncés 4.1, 4.2 et 4.3 résultent d'un théorème de N.M. Katz ([7] 5.1.1).

4.4.2. A l'opposé de 4.4.1, si les d_i $(i \in I)$, sont deux à deux distincts, l'hypothèse (B) est automatique (on suppose bien entendu les a_i $(i \in I)$ non tous nuls).

4.4.3. Dans le cas où un seul a_i est non nul, on peut donner une démonstration plus élémentaire de 4.3. En utilisant les résultats de A. Weil [12], on se ramène à $\mathrm{card}(I) = 2$, i.e. à une hypersurface diagonale $1+\sum_{i\in I} c_i y_i^{d_i}=0$ qui est une courbe. En particulier, il est facile d'obtenir 4.2 en utilisant la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič.

4.4.4. Considérons les sommes trigonométriques

$$S_n(p;\alpha,\beta) = \sum_{\substack{\xi^3+\eta^3=1+\zeta^2 \\ \xi,\eta,\zeta\in\mathbb{F}_{p^n}}} \psi_n(\alpha\xi+\beta\eta)$$

où $\alpha,\beta \in \mathbb{F}_p$, étudiées par C. Hooley [4]. Supposons, comme le fait C. Hooley, que $\alpha \neq 0$ et que $p \equiv 2 \pmod 3$, $p \neq 2$. Alors notre hypothèse (A) est vérifiée et notre hypothèse (B) équivaut à $\alpha^3 \neq \beta^3$, i.e. $\alpha \neq \beta$, puisque $p \equiv 2 \pmod 3$ et que $\alpha,\beta \in \mathbb{F}_p$. La condition $\alpha \neq \beta$ est bien celle qu'impose C. Hooley.

5. Définition et pureté des sommes $s_{I,n}$.

5.0. L'étude directe de la pureté des sommes $S_{I,n}$ semble peu abordable dans la mesure où l'on ne connait pas de compactification lisse simple des hypersurfaces diagonales. Suivant une suggestion de N.M. Katz, nous allons ramener, en partie, l'étude des sommes $S_{I,n}$ à celle des sommes $s_{I,n}$ décrites ci-dessous. Ces sommes $s_{I,n}$ seront d'étude plus facile dans la mesure où elles sont indexées par les points à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^n}$ d'une hypersurface de Fermat qui admet une compactification lisse très simple.

Soient donc d un entier strictement positif, I un ensemble fini non vide, $(r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers strictement positifs et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{F}_q$ non tous nuls.

Soit $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère additif non trivial, on considère les sommes trigonométriques $(n \geqslant 1)$

$$(5.0.1) \qquad s_{I,n} = s_n = \sum_{1+\sum_{i\in I} x_i^d = 0} \psi_n\Big(\sum_{i\in I} a_i x_i^{r_i}\Big) \qquad (x_i \in \mathbb{F}_{q^n}).$$

Ces sommes sont attachées à la situation géométrique suivante : soit

$$(5.0.2) \qquad U_{I,o} = U_o$$

le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^I_{\mathbb{F}_a} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[(x_i)_{i\in I}])$ d'équation

$$1 + \sum_{i\in I} x_i^d = 0 \ ,$$

soit

$$(5.0.3) \qquad f_{I,o} = f_o : U_o \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$$

le morphisme défini par

$$f_o((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i x_i^{r_i}$$

et soit

$$\mathcal{F}_{I,o} = \mathcal{F}_o = \mathcal{L}(\psi, f_o) \ , \tag{5.0.4}$$

$\mathcal{F}_o$ est donc un E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur U_o .

D'après (3.0.1), on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$s_n = \mathrm{Tr}((F^*)^n, H_c^*(U, \mathcal{F})) \ . \tag{5.0.5}$$

5.0.6. Nous noterons $r_1 > r_2 > \ldots > r_N \geqslant 1$ les valeurs distinctes prises par les r_i $(i \in I)$ et nous poserons, pour tout $\nu = 1, \ldots, N$,

$$I_\nu = \{i \in I \mid r_i = r_\nu\}$$

et

$$I'_\nu = \{i \in I_\nu \mid a_i \neq 0\} \ .$$

On posera enfin

$$I' = \bigcup_{\nu=1}^{N} I'_\nu = \{i \in I \mid a_i \neq 0\} \ .$$

Nous allons dans un premier temps démontrer un énoncé de pureté pour les sommes $s_{I,n}$ qui nous servira de point de départ pour prouver 4.1.

5.1. Nous démontrerons la pureté des sommes trigonométriques $s_{I,n}$ sous les deux hypothèses suivantes (peut-être trop restrictives, mais cela nous suffira) :

(A_1) <u>Pour tout</u> $i \in I$, r_i <u>est premier à</u> p ; d <u>est premier à</u> p .

(B_1) <u>Il existe au plus un</u> $i \in I$ <u>tel que</u> $a_i = 0$ (i.e. $\mathrm{card}(I') \geqslant \mathrm{card}(I)-1$) ; <u>pour tout</u> $\nu = 1, \ldots, N$, <u>tel que</u> I'_ν <u>contienne au moins deux éléments</u>, <u>les deux cônes de</u> $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{I'_\nu} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i \in I'_\nu}])$ <u>d'équations</u>

$$\sum_{i \in I'_\nu} a_i x_i^{r_\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I'_\nu} x_i^d = 0$$

<u>sont transverses en dehors de l'origine</u>.

Soit

(5.1.1) $$Z_I = Z$$

l'hypersurface projective de Fermat, de degré d , dans $\mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[X_o,(X_i)_{i\in I}])$ d'équation

$$\sum_{i\in I} X_i^d + X_o^d = 0 .$$

Alors Z est une compactification lisse de U (on a $(d,p)=1$ d'après (A_1)) : U est l'ouvert de Z défini par $X_o \neq 0$; on notera

(5.1.2) $$j_I = j : U \hookrightarrow Z$$

l'inclusion et on posera

(5.1.3) $$Y_I = Y = Z-U .$$

Pour tout $x \in U$, de coordonnées homogènes $(X_o,(X_i)_{i\in I})$, on a

$$f(x) = \sum_{i\in I} a_i \left(\frac{X_i}{X_o}\right)^{r_i} .$$

PROPOSITION 5.2. Sous les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1, on a

$$(R^i j_* \mathcal{F})_z = 0$$

pour tout point fermé z de Y et pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Par suite (3.2, 3.3) :

COROLLAIRE 5.2.1. Sous les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1, la flèche d'oubli des supports

$$H^i_c(U,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(U,\mathcal{F})$$

est un isomorphisme, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et les sommes trigonométriques s_n sont pures de poids card(I)-1 .

5.3. Pour prouver 5.2, il est commode d'introduire la notion suivante : soient Z un schéma de type fini sur un corps k algébriquement clos, Y un sous-schéma fermé de Z et z un point fermé de Y tel que (Z,Y) soit un k-couple lisse en z de codimension 1.

Alors, nous appellerons <u>système de coordonnées locales sur</u> Z , <u>centré en</u> Z , <u>adapté à</u> Y un diagramme de morphismes de k-schémas pointés

$$(5.3.0) \qquad \begin{array}{ccc} & (Z',z') & \\ {\scriptstyle\pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\underline{u}} \\ (Z,z) & & (\mathbb{A}_k^{m+1},0) \end{array}$$

où π est étale, où $\underline{u} = (u_o,u_1,\ldots,u_m)$ est lisse et tel que $\pi^{-1}(Y)$ soit défini dans Z' par l'équation $u_o = 0$ (un tel système n'est pas nécessairement <u>complet</u>, il ne l'est que si $\underline{u}$ est étale, i.e. si $m+1 = \dim_z(Z)$).

Soit $\mathfrak{F}$ un E_λ-faisceau sur $Z-Y$ (où E_λ est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ pour un ℓ inversible dans k), nous dirons qu'un système de coordonnées locales (5.3.0) sur Z , centré en z , adapté à Y , est <u>adapté à</u> $\mathfrak{F}$ s'il existe un E_λ-faisceau $\mathcal{G}$ sur l'ouvert de $\mathbb{A}_k^{m+1}$ défini par $u_o \neq 0$ tel que $\pi^*\mathfrak{F}$ soit isomorphe à $\underline{u}^*\mathcal{G}$ sur $Z' - \pi^{-1}(Y)$. Notons alors j (resp. j',i) l'inclusion $Z-Y \hookrightarrow Z$ (resp. $Z'-\pi^{-1}(Y) \hookrightarrow Z'$, $\{u_o \neq 0\} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^{m+1}$) ; le lemme suivant nous servira plusieurs fois dans la suite de cet article :

LEMME 5.3.1. <u>Avec les notations et les hypothèses ci-dessus</u>, <u>on a</u>

$$(R^n j_*\mathfrak{F})_z = (R^n i_*\mathcal{G})_o$$

<u>pour tout entier</u> $n \geqslant 0$.

Cela résulte aussitôt du théorème de changement de base par un morphisme lisse.

5.4. <u>Prouvons</u> 5.2.

5.4.0. Soit z un point fermé de Y , nous allons construire un système de coordonnées locales sur Z , centré en z , adapté à Y et à $\mathfrak{F}$.

Comme X_o et $\sum_{i\in I} X_i^d + X_o^d$ s'annule en z, il existe au moins deux indices $i \in I$ pour lesquels X_i ne s'annule pas en z et, puisque $\mathrm{card}(I') \geqslant \mathrm{card}(I)-1$, X_i ne s'annule pas en z pour au moins un $i \in I'$. Il existe donc un unique entier $m \in \{1,2,\ldots,N\}$ tel que :

(i) X_i s'annule en z, pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = 1,\ldots,m-1$;

(ii) il existe $i \in I'_m$ pour lequel X_i ne s'annule pas en z.

Distinguons alors deux cas :

(a) $\sum_{i\in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ <u>ne s'annule pas en</u> z : alors choisissons un indice $i_m \in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z ; la fonction rationnelle

$$\eta = \frac{\sum_{\nu=m}^{N} X_o^{r_m - r_\nu} \left(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\right)}{X_{i_m}^{r_m}}$$

est définie dans un voisinage de z et ne s'annule pas en z ; comme $(r_m,p) = 1$ (d'après (A_1)), le revêtement de Kümmer

$$\pi : (Z',z') \longrightarrow (Z,z)$$

d'équation

$$\zeta^{r_m} = \eta$$

est étale en z' (le choix de z' correspond au choix d'une racine r_m-ième de $\eta(z)$), donc, quitte à restreindre Z' en un voisinage ouvert de z', est étale partout. Choisissons pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = 1,\ldots,m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i et considérons les fonctions sur Z', s'annulant en z',

$$u_o = \zeta^{-1} \frac{X_o}{X_{i_m}}$$

et

$$u_i = a'_i\, \zeta^{-1} \frac{X_i}{X_{i_m}} \quad (i \in I'_\nu,\ \nu = 1,\ldots,m-1) ;$$

soit $\mathbb{A}$ l'espace affine sur $\mathbb{F}$ de dimension $1 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \mathrm{card}(I'_\nu)$

et soit

$$\underline{u} : (Z',z') \longrightarrow (\mathbb{A},o)$$

le morphisme de composantes u_o et les u_i ci-dessus. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (Z',z') & \\ {\scriptstyle\pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\underline{u}} \\ (Z,z) & & (\mathbb{A},o) \end{array}$$

est un système de coordonnées locales sur Z, centré en z, adapté à Y ; de plus, il est adapté à $\mathfrak{F}$ car, par construction,

$$\pi^*\mathfrak{F} = \underline{u}^*\mathfrak{L}(\psi,(\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{i\in I'_\nu}(\frac{u_i}{u_o})^{r_\nu}) + \frac{1}{u_o^{r_m}}) .$$

(b) $\sum_{i\in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ s'annule en z ; alors, choisissons un indice $i_m \in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z et choisissons, pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = 1,\ldots,m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i ; les fonctions rationnelles

$$u_o = \frac{X_o}{X_{i_m}}$$

et

$$u_i = a'_i \frac{X_i}{X_{i_m}} \quad (i \in I'_\nu ,\ \nu = 1,\ldots,m-1)$$

$$v = \frac{\sum_{\nu=m}^{N} X_o^{r_m - r_\nu}(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu})}{X_{i_m}^{r_m}}$$

sont définies en z et s'annulent en z. Soit $\mathbb{A}$ l'espace affine sur $\mathbf{F}$ de dimension $2 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \mathrm{card}(I'_\nu)$, alors l'hypothèse (B_1) assure que le morphisme

$$\underline{u} : (Z',z) \longrightarrow (\mathbb{A},o) ,$$

de composantes u_o, u_i $(i \in I'_\nu ,\ \nu = 1,\ldots,m-1)$ et v, défini sur un voisinage de Zariski convenable Z' de z dans Z, est lisse, de sorte que

$$\begin{array}{ccc} & (Z',z) & \\ \swarrow & & \searrow^{u} \\ (Z,z) & & (\mathbb{A},o) \end{array}$$

est un système de coordonnées locales sur Z, centré en z, adapté à Y ; de plus, ce système est adapté à $\mathfrak{F}$ car, par construction, $\mathfrak{F}|Z'$ est isomorphe à

$$u^{*}\mathfrak{L}(\psi,(\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{i\in I'_{\nu}}(\frac{u_i}{u_o})^{r_\nu})+\frac{v}{u_o^{r_m}}) .$$

L'énoncé 5.2 est donc conséquence du lemme suivant (cf. 5.3.1).

LEMME 5.4.1. *Soient* m *un entier*, $m\geqslant 1$, $(r_1,\ldots,r_m)$ *une suite d'entiers positifs premiers à* p, *strictement décroissante*, $(I'_\nu)_{\nu=1,\ldots,m-1}$ *une famille finie d'ensembles finis deux à deux disjoints et* $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$ *un caractère additif non trivial. Alors :*

(i) *si* $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[u_o,(u_i)_{i\in I'_\nu,\nu=1,\ldots,m-1}])$ *et si* $j : \mathbb{A}^\circ \hookrightarrow \mathbb{A}$ *est l'inclusion de l'ouvert* $\mathbb{A}^\circ$ *de* $\mathbb{A}$ *défini par* $u_o\neq 0$, *on a, pour tout* $n\in\mathbb{N}$,

$$[R^n j_*\mathfrak{L}(\psi,(\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{i\in I'_{\nu}}(\frac{u_i}{u_o})^{r_\nu})+\frac{1}{u_o^{r_m}})]_{(0,\ldots,0)} = 0$$

(ii) *si* $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[u_o,(u_i)_{i\in I'_\nu,\nu=1,\ldots,m-1},v])$ *et si* $j : \mathbb{A}^\circ \hookrightarrow \mathbb{A}$ *est l'inclusion de l'ouvert* $\mathbb{A}^\circ$ *de* $\mathbb{A}$ *défini par* $u_o\neq 0$, *on a, pour tout* $n\in\mathbb{N}$,

$$[R^n j_*\mathfrak{L}(\psi,(\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{i\in I'_{\nu}}(\frac{u_i}{u_o})^{r_\nu})+\frac{v}{u_o^{r_m}})]_{(0,\ldots,0)} = 0 .$$

5.4.2. Prouvons 5.4.1. Nous allons prouver simultanément les assertions (i) et (ii) en raisonnant par récurrence sur l'entier m ; nous noterons encore $(i)_m$ et $(ii)_m$ ces assertions.

Pour $m=1$, ces deux assertions sont connues ([8] 3.1.1).

Admettons $(i)_{m'}$ et $(ii)_{m'}$ pour tout entier $m'<m$ et prouvons $(i)_m$ et $(ii)_m$. Nous commencerons par $(i)_m$.

Les notations étant celles de $(i)_m$, soit $\mathbb{P}$ la complétion projective de $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{P} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[U_o,(U_i)_{i\in I'_\nu,\nu=1,\ldots,m-1},T])$$

et soit $k : \mathbb{P}^o \hookrightarrow \mathbb{P}$ l'inclusion de l'ouvert $\mathbb{P}^o$ de $\mathbb{P}$ défini par $U_o \neq 0$. Soit $\mathcal{F}$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{P}^o$ défini par

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}(\psi,(\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{i\in I'_\nu}(\frac{U_i}{U_o})^{r_\nu}) + (\frac{T}{U_o})^{r_m})$$

et soit Δ le cône de la flèche canonique

$$k_! \mathcal{F} \longrightarrow R k_* \mathcal{F}$$

dans la catégorie dérivée $D^b_c(\mathbb{P},E_\lambda)$ (cf. Deligne, Weil II).

Soit x_o le point de $\mathbb{P}-\mathbb{P}^o$ de coordonnées homogènes $U_o = U_i = 0$ $(i \in I'_\nu , \nu = 1,\ldots,m-1)$ et $T = 1$. L'assertion $(i)_m$ équivaut alors à la nullité de Δ en x_o . Pour montrer que $\Delta_{x_o} = 0$, on va montrer que Δ est concentré en x_o et que $R\Gamma(\mathbb{P},\Delta) = 0$.

Comme Δ est concentré sur $\mathbb{P}-\mathbb{P}^o$, il suffit de montrer que $\Delta_x = 0$ pour tout point fermé $x \neq x_o$ de $\mathbb{P}-\mathbb{P}^o$, i.e. que $(R^n k_* \mathcal{F})_x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, pour un tel $x \neq x_o$, on peut construire, de la même manière qu'en 5.4.0, un système de coordonnées locales sur $\mathbb{P}$, centré en x , adapté à $\mathbb{P}-\mathbb{P}^o$ et à $\mathcal{F}$, qui ramène, modulo 5.3.1, l'énoncé de nullité de $(R^n k_* \mathcal{F})_x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'une des assertions $(i)_{m'}$ et $(ii)_{m'}$ de 5.4.1 pour un entier $m' < m$; par suite l'hypothèse de récurrence assure que Δ est concentré en x_o .

Pour prouver maintenant que $R\Gamma(\mathbb{P},\Delta) = 0$, ou, ce qui revient au même, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche d'oubli des supports

$$H^n_c(\mathbb{P}^o,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathbb{P}^o,\mathcal{F})$$

est un isomorphisme, on remarque que

$$\mathbb{P}^\circ = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(\tilde{u}_i)_{i\in I'_\nu,\nu=1,\ldots,m},t]) ,$$

où $\tilde{u}_i = U_i/U_o$ et $t = T/U_o$, et que ((2.1.3), (2.1.4))

$$\mathcal{F} = (\boxtimes_{\nu=1}^{m-1} \boxtimes_{i\in I'_\nu} \mathcal{L}(\psi,\tilde{u}_i^{r_i})) \boxtimes \mathcal{L}(\psi,t^{r_m})$$

de sorte qu'on est ramené, par Künneth, au lemme suivant :

LEMME 5.4.2.1 ([8] 3.2.1). *Soient* $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[\tilde{u}])$, r *un entier* $\geqslant 1$ *et* $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$ *un caractère additif non trivial. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la flèche d'oubli des supports*

$$H_c^n(\mathbb{A}^1,\mathcal{L}(\psi,\tilde{u}^r)) \longrightarrow H^n(\mathbb{A}^1,\mathcal{L}(\psi,\tilde{u}^r))$$

est un isomorphisme.

Ce lemme achève la démonstration de l'assertion $(i)_m$, passons à l'assertion $(ii)_m$ de 5.4.1.

Les notations étant celles de l'assertion $(ii)_m$, soit $\mathbb{P}$ la complétion projective de $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{P} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[U_o,(U_i)_{i\in I'_\nu,\nu=1,\ldots,m-1},V,T]) ,$$

et soit $k : \mathbb{P}^\circ \hookrightarrow \mathbb{P}$ l'inclusion de l'ouvert $\mathbb{P}^\circ$ de $\mathbb{P}$ défini par $U_o \neq 0$. Soit $\mathcal{F}$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{P}^\circ$ défini par

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}(\psi,(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{i\in I'_\nu} (\frac{U_i}{U_o})^{r_\nu}) + \frac{VT^{r_m-1}}{U_o^{r_m}})$$

et soit Δ le cône de la flèche canonique

$$k_! \mathcal{F} \longrightarrow R k_* \mathcal{F}$$

dans la catégorie dérivée $D_c^b(\mathbb{P},E_\lambda)$.

Soient x_o (resp. x_1) le point de $\mathbb{P}-\mathbb{P}^\circ$ de coordonnées homogènes $U_o = U_i = 0$ $(i \in I'_\nu , \nu = 1,\ldots,m-1)$ et $V = 0$, $T = 1$ (resp. et $V = 1$, $T = 0$). L'assertion $(ii)_m$ équivaut à la nullité de Δ en x_o . Pour montrer que $\Delta_{x_o} = 0$, on va montrer que Δ est concentré en x_o et x_1 et que $R\Gamma(\mathbb{P},\Delta) = 0$ (on aura même en fait,

comme conclusion, $\Delta = 0$).

Comme Δ est concentré sur $\mathbb{P}-\mathbb{P}^\circ$, il suffit de montrer que $\Delta_x = 0$ pour tout point fermé $x \neq x_\circ, x_1$ de $\mathbb{P}-\mathbb{P}^\circ$, i.e. que $(R^n k_* \mathcal{F})_x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, pour un tel $x \neq x_\circ, x_1$, on peut construire, de la même manière qu'en 5.4.0, un système de coordonnées locales sur $\mathbb{P}$, centré en x, adapté à $\mathbb{P}-\mathbb{P}^\circ$ et à $\mathcal{F}$, qui ramène, modulo 5.3.1, l'énoncé de nullité de $(R^n k_* \mathcal{F})_x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit à l'assertion $(i)_{m'}$ pour $m' \leqslant m$, soit à l'assertion $(ii)_{m'}$ pour $m' < m$ (si x n'est pas dans le fermé de $\mathbb{P}$ d'équation $U_\circ = U_i = 0$ $(i \in I'_\nu, \nu = 1, \ldots, m-1)$, on est ramené à l'une des assertions $(i)_{m'}$ et $(ii)_{m'}$ pour un entier $m' < m$ et, si x est dans ce fermé, $x \neq x_\circ, x_1$, on a $V \neq 0$, $T \neq 0$ et on est ramené à l'assertion $(i)_m$ pour l'entier m) ; par suite l'hypothèse de récurrence et l'assertion $(i)_m$ que l'on a précédemment démontrée assurent que Δ est concentré en $x_\circ$ et x_1.

Pour prouver maintenant que $R\Gamma(\mathbb{P}, \Delta) = 0$, ou, ce qui revient au même, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche d'oubli des supports

$$H^n_c(\mathbb{P}^\circ, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathbb{P}^\circ, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme, on remarque que

$$\mathbb{P}^\circ = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(\tilde{u}_i)_{i \in I'_\nu, \nu = 1, \ldots, m-1}, \tilde{v}, t])$$

où $\tilde{u}_i = U_i/U_\circ$, $\tilde{v} = V/U_\circ$ et $t = T/U_\circ$, et que ((2.1.3), (2.1.4))

$$\mathcal{F} = \Big(\bigotimes_{\nu=1}^{m-1} \bigotimes_{i \in I'_\nu} \mathcal{L}(\psi, \tilde{u}_i^{r_i}) \Big) \otimes \mathcal{L}(\psi, \tilde{v} t^{r_m - 1})$$

de sorte que l'on est ramené, par Künneth, au lemme 5.4.2.1 et au lemme suivant :

LEMME 5.4.2.2. *Soient* $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[\tilde{v}, t])$, r *un entier positif, premier à* p, *et* $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E^*_\lambda$ *un caractère additif non trivial. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la flèche d'oubli des supports*

$$H_c^n(\mathbb{A}^2, \mathcal{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1})) \longrightarrow H^n(\mathbb{A}^2, \mathcal{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1}))$$

est un isomorphisme.

Prouvons ce lemme. Soit $j : \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ l'immersion ouverte usuelle, d'après [8] 3.1.1, la flèche d'oubli des supports

$$j_! \mathcal{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1}) \longrightarrow R_{j_*} \mathcal{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1})$$

est un isomorphisme dans $D_c^b(\mathbb{P}^2, E_\lambda)$, d'où 5.4.2.2.

6. Un premier énoncé de pureté des sommes $S_{I,n}$.

6.0. Nous allons prouver la pureté des sommes $S_{I,n}$ sous les hypothèses (A) et (B) de 4.0, pour tous les c_i égaux à 1 (cf. 4.3.0), avec la restriction suivante : on suppose que tous les a_i , sauf un éventuellement sont non nuls, i.e. on suppose que $\mathrm{card}(I') \geqslant \mathrm{card}(I)-1$, où I' désigne comme en 4.0.6 la réunion des I'_ν $(\nu = 1,\dots,N)$ et où $I'_\nu = \{i \in I \mid d_i = d_\nu \text{ et } a_i \neq 0\}$.

En fait, pour des raisons techniques qui seront rendues claires au numéro 8.4.1, nous établirons un résultat un peu plus général : au lieu de prendre, comme en 4.0.6, pour d le p.p.c.m des d_i $(i \in I)$, nous prendrons pour d un multiple quelconque des d_i $(i \in I)$; nous désignerons toujours par r_i le quotient d/d_i $(i \in I)$ et par $r_1 > r_2 > \dots > r_N \geqslant 1$ les valeurs distinctes prises par les r_i $(i \in I)$, de sorte que l'on a encore, pour tout $\nu = 1,\dots,N$, $I_\nu = \{i \in I \mid r_i = r_\nu\}$.

Compte-tenu de ces modifications, nous remplacerons les hypothèses (A) et (B) par les suivantes :

(A_2) d est premier à p .

(B_2) Il existe au plus un $i \in I$ tel que $a_i = 0$; pour tout $\nu = 1,\dots,N$ tel que I'_ν contienne au moins deux éléments, les deux cônes de $\mathbb{A}^{I'_\nu}_{\mathbb{F}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i\in I'_\nu}])$ d'équations

$$\sum_{i\in I'_\nu} a_i x_i^{r_\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I'_\nu} x_i^{d} = 0$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Rappelons ((4.0.2), (4.0.3) et (4.0.4)) que V désigne le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^I_{\mathbb{F}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in I}])$ d'équation $1+\sum_{i\in I} y_i^{d_i} = 0$, que $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ est la fonction sur V définie par $g((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i$ et que $\mathcal{G}$ est le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V défini par $\mathcal{G} = \mathcal{L}(\psi, g)$.

Pour toute partie K de I, notons

(6.0.1) $$\nu_K : V^K \hookrightarrow V$$

l'ouvert de V défini par les conditions $y_k \neq 0$, pour tout $k \in K$.

Considérons le groupe fini

(6.0.2) $$G = \prod_{i\in I} \mu_{r_i}(\mathbb{F}) .$$

Alors, un caractère $\underline{\chi}$ de G à valeurs dans E_λ^* est une famille $(\chi_i)_{i\in I}$, où chaque $\chi_i : \mu_{r_i}(\mathbb{F}) \longrightarrow E_\lambda^*$ est un caractère. Le <u>support</u>, $\mathrm{Supp}(\underline{\chi})$, d'un tel caractère $\underline{\chi}$ est par définition l'ensemble des indices $i \in I$ tels que χ_i ne soit pas trivial.

A tout caractère $\underline{\chi}$ de G, de support $K \subset I$, on associe le E_λ-faisceau, $\mathcal{K}(\underline{\chi})$, lisse de rang 1 sur V^K, défini par (cf. (2.2.1))

(6.0.3) $$\mathcal{K}(\underline{\chi}) = \bigotimes_{k\in K} \mathcal{K}_{r_k}(\chi_k, y_k)$$

où, pour $k \in K$, y_k est considérée comme morphisme de V^K dans $\mathbb{G}_m$.

PROPOSITION 6.1. <u>Sous les hypothèses</u> (A_2) <u>et</u> (B_2), <u>pour tout caractère</u> χ, <u>de support</u> K, <u>du groupe</u> G <u>à valeurs dans</u> E_λ^* <u>et pour tout entier</u> $i \geqslant 0$, <u>la flèche d'oubli des supports</u>

$$H_c^i(V^K, \mathcal{K}(\underline{\chi}) \otimes \nu_K^* \mathcal{G}) \longrightarrow H^i(V^K, \mathcal{K}(\underline{\chi}) \otimes \nu_K^* \mathcal{G})$$

<u>est un isomorphisme</u>. <u>En particulier</u>, <u>pour le caractère trivial de</u> G, <u>la flèche d'oubli des supports</u>

$$H_c^i(V, \mathcal{G}) \longrightarrow H^i(V, \mathcal{G})$$

<u>est un isomorphisme pour tout entier</u> $i \geqslant 0$.

6.2. Prouvons 6.1. Rappelons ((5.0.2), (5.0.3) et (5.0.4)) que U désigne le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^I = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i\in I}])$ d'équation $\sum_{i\in I} x_i^d + 1 = 0$, que $f : U \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^1$ désigne la fonction sur U définie par $f((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i x_i^{r_i}$ et que $\mathcal{F}$ désigne le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur U défini par $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\psi, f)$.

On dispose alors d'un morphisme

$$\pi : U \longrightarrow V \tag{6.2.1}$$

défini par

$$\pi((x_i)_{i\in I}) = (x_i^{r_i})_{i\in I} ;$$

ce morphisme π rend commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^1_{\mathbf{F}} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{g} & \\ V & & \end{array} \tag{6.2.2}$$

de sorte que l'on a (2.1.2)

$$\mathfrak{F} = \pi^* \mathcal{G} . \tag{6.2.3}$$

Le morphisme π étant fini, les deux suites spectrales de Leray

$$E_2^{ij} = H_c^i(V, R^j\pi_!\mathfrak{F}) \Longrightarrow H_c^{i+j}(U,\mathfrak{F})$$
$$E_2^{ij} = H^i(V, R^j\pi_*\mathfrak{F}) \Longrightarrow H^{i+j}(U,\mathfrak{F})$$

dégénèrent en E_2 en des isomorphismes

$$H_c^i(V,\pi_!\mathfrak{F}) \simeq H_c^i(U,\mathfrak{F}) \qquad (i \in \mathbb{N})$$
$$H^i(V,\pi_*\mathfrak{F}) \simeq H^i(U,\mathfrak{F}) \qquad (i \in \mathbb{N}) .$$

De plus, vu (6.2.3), on a

$$\pi_!\mathfrak{F} = \pi_*\mathfrak{F} = (\pi_*E_\lambda) \otimes \mathcal{G}$$

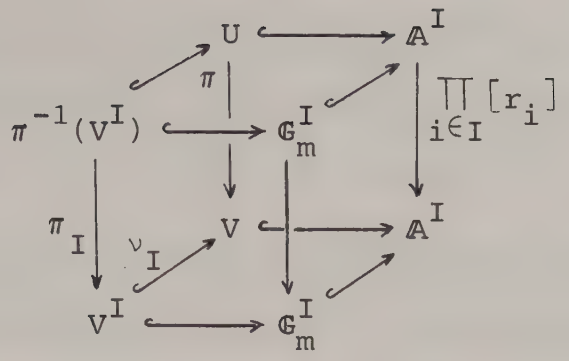
donc 5.2.1 a la conséquence suivante : pour tout $i \in \mathbb{N}$, la flèche d'oubli des supports

$$H_c^i(V,(\pi_*E_\lambda) \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow H^i(V,(\pi_*E_\lambda) \otimes \mathcal{G}) \tag{6.2.4}$$

est un isomorphisme (les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0 impliquent les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1).

Déterminons maintenant la structure du E_λ-faisceau π_*E_λ . On a un cube de $\mathbf{F}$-morphismes à faces cartésiennes

(6.2.5)



où $[r_i]:\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ est l'élévation à la puissance r-ième et où π_I est la restriction de π au-dessus de V^I. On déduit de (6.2.5) que

$$\pi_* E_\lambda = (\nu_I)_* (\pi_I)_* E_\lambda \ .$$

D'après (2.2.2), (2.2.7) et (2.2.9), $(\pi_I)_* E_\lambda$ admet une décomposition canonique

$$(\pi_I)_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi}\in\hat{G}} \Big[\bigotimes_{i\in I} \mathcal{K}_{r_i}(\chi_i, y_i) \Big] \ .$$

On en déduit une décomposition canonique de $\pi_* E_\lambda$

$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi}\in\hat{G}} (\nu_I)_* \Big[\bigotimes_{i\in I} \mathcal{K}_{r_i}(\chi_i, y_i) \Big]$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi}\in\hat{G}} (\nu_{\underline{\chi}})_* \, \mathcal{K}(\underline{\chi}) \tag{6.2.6}$$

où $\mathcal{K}(\underline{\chi})$ est défini en (6.0.3) et où l'on a posé

$$\nu_{\underline{\chi}} = \nu_{\mathrm{Supp}(\underline{\chi})} : V^{\mathrm{Supp}(\underline{\chi})} \longrightarrow V \tag{6.2.7}$$

pour tout $\underline{\chi} \in \hat{G}$.

Il résulte alors de (6.2.6) que la flèche (6.2.4) est somme directe, pour $\underline{\chi}$ parcourant $\hat{G}$, des flèches d'oubli des supports

$$H^i_c(V, ((\nu_{\underline{\chi}})_* \mathcal{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(V, ((\nu_{\underline{\chi}})_* \mathcal{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathbb{C}) \tag{6.2.8}$$

(ceci, pour tout $i \in I$). Par conséquent, comme (6.2.4) est un isomorphisme, les flèches (6.2.8) sont toutes des isomorphismes.

Considérons, pour tout caractère $\underline{\chi}$ de G, de support K, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_c^i(V^K, \mathcal{K}(\underline{\chi}) \otimes \nu_K^* \mathcal{G}) & \xrightarrow{(3)} & H_c^i(V, ((\nu_K)_* \mathcal{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathcal{G}) \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) \\ H^i(V^K, \mathcal{K}(\underline{\chi}) \otimes \nu_K^* \mathcal{G}) & \xleftarrow{(4)} & H^i(V, ((\nu_K)_* \mathcal{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathcal{G}) \end{array} \tag{6.2.9}$$

où les flèches (1) et (2) sont les flèches d'oubli des supports et où les flèches (3) et (4) sont les flèches de restrictions de V à V^K. Ce diagramme est commutatif et (2), qui n'est autre que (6.2.8), est un isomorphisme. De plus, si la flèche naturelle

$$(\nu_K)_! \mathcal{K}(\underline{\chi}) \longrightarrow (\nu_K)_* \mathcal{K}(\underline{\chi})$$

est un isomorphisme, (3) est un isomorphisme et, si l'on a

$$R^j(\nu_K)_* \mathcal{K}(\underline{\chi}) = 0 \qquad (\forall j \geqslant 0) ,$$

(4) est un isomorphisme.

Pour prouver que la flèche (1) du diagramme (6.2.9) est un isomorphisme et donc pour achever la démonstration de 6.1, il nous reste à montrer que

$$\left[R^j(\nu_K)_* \mathcal{K}(\underline{\chi})\right]_v = 0 \tag{6.2.10}$$

pour tout point fermé v de $V\text{-}V^K$ et pour tout entier $j \geqslant 0$. Considérons donc un point fermé v de $V\text{-}V^K$ et soit $K' = \{k \in K \mid y_k(v) = 0\}$. Alors $K' \neq \emptyset$ et le morphisme

$$\underline{y} : (V, v) \longrightarrow (\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{K'}, 0) ,$$

de coordonnées $(y_k)_{k \in K'}$, est lisse en v (on rappelle que V est l'hypersurface affine d'équation $\sum_{i \in I} y_i^{d_i} + 1 = 0$). Notons $\mu_{K'} : \mathbb{G}_m^{K'} \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{K'}$ l'immersion ouverte habituelle. Quitte à remplacer V par un voisinage de v pour la topologie étale, V^K coïncide avec $\underline{y}^{-1}(\mathbb{G}_m^{K'})$ et ((2.2.1), (2.2.5))

$$\mathcal{K}(\underline{\chi}) = \underline{y}^* \left(\boxtimes_{k \in K'} \chi_k(\mathcal{K}_{r_k}) \right) .$$

Il s'en suit (cf. 5.3.1) que, pour tout entier $j \geqslant 0$,

$$[R^j(\nu_K)_* \mathcal{K}(\underline{\chi})]_v = [R^j(\mu_{K'})_* (\boxtimes_{k\in K'} \chi_k(\mathcal{K}_{r_k}))]_o$$

et (6.2.10) est conséquence, modulo Künneth, du lemme bien connu suivant

LEMME 6.2.11. *Soit* $\mu : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ *l'immersion ouverte habituelle, soit* r *un entier premier à* p, $r > 0$, *et soit* χ *un caractère non trivial du groupe* $\mu_r(\mathbb{F})$ *à valeurs dans* E_λ, *alors la flèche canonique*

$$\mu_! \chi(\mathcal{K}_r) \longrightarrow R\mu_* \chi(\mathcal{K}_r)$$

est un isomorphisme dans $D^b_c(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, E_\lambda)$.

Le point est que $\chi(\mathcal{K}_r)$ est de rang 1 et effectivement ramifié en 0 puisque χ est non trivial.

7. Rappels sur le produit de convolution de P. Deligne [2].

7.0. Soit k un corps de caractéristique p, soient ℓ un nombre premier distinct de p et E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, soient I un ensemble fini de cardinal $m \geqslant 2$ et, pour chaque $i \in I$, $\mathbb{A}_i = \mathrm{Spec}(k[t_i])$ une copie de la droite affine sur k. On note

$$(7.0.1) \qquad s : \mathbb{A}^I = \coprod_{i\in I} \mathbb{A}_i \longrightarrow \mathbb{A} = \mathrm{Spec}(k[t])$$

le morphisme somme, défini par

$$s((t_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} t_i \ .$$

7.0.2. Un E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ sur la droite affine $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}(k[t])$ sera dit <u>de type</u> $(*)$ s'il vérifie la condition :

$(*)$ $\mathcal{F}$ <u>est nul en</u> 0, <u>lisse sur</u> $\mathbb{A}-\{0\}$ <u>et modérément ramifié en</u> 0 <u>et à l'infini</u>.

REMARQUE. Si k est algébriquement clos, l'hypothèse de modération de la condition $(*)$ peut aussi s'exprimer comme suit : le E_λ-faisceau lisse $\mathcal{F}|\mathbb{A}-\{0\}$ est trivialisé par un revêtement de Kummer de $\mathbb{A}-\{0\}$, d'équation $y^d = t$, pour au moins un entier positif d premier à p.

La proposition suivante est due à Deligne :

PROPOSITION 7.1. <u>Soit, pour tout</u> $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ <u>un</u> E_λ<u>-faisceau sur</u> $\mathbb{A}_i$ <u>qui est soit le faisceau constant</u> E_λ, <u>soit de type</u> $(*)$. <u>Alors la formation de</u> $Rs_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i)$ <u>(dans</u> $D^b_c(\mathbb{A}, E_\lambda)$<u>) commute à tout changement de base</u> $S \longrightarrow \mathbb{A}$. <u>De plus</u> :

(i) <u>si, pour tout</u> $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ <u>est le faisceau constant</u> E_λ, <u>on a</u>

$$R^j s_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ E_\lambda & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

(ii) s'il existe $i,j \in I$, $i \neq j$, tels que $\mathcal{F}_i$ soit le faisceau constant E_λ et que $\mathcal{F}_j$ soit de type (*), on a

$$Rs_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i) = 0$$

dans $D_c^b(\mathbb{A}, E_\lambda)$;

(iii) si, pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ est de type (*), on a

$$R^j s_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i) = 0 \quad \text{si} \quad j \neq m-1$$

et le E_λ-faisceau $R^{m-1}s_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i)$ est de type (*), de rang $\prod_{i\in I} \operatorname{rang}(\mathcal{F}_i)$ sur $A-\{0\}$.

Dans le cas où tous les $\mathcal{F}_i$ sont de type (*), Deligne appelle produit de convolution de la famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$, le E_λ-faisceau de type (*)

$$(7.1.1) \qquad \overset{*}{\underset{i\in I}{}} \mathcal{F}_i = R^{m-1}s_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i) .$$

REMARQUE. $Rs_!(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i)$ mérite souvent mieux le nom de produit de convolution, mais $Rs_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i)$ a la vertu de préserver (*).

7.2. Soit $\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec}(k[u,u^{-1}])$ le groupe multiplicatif sur k ; notons

$$(7.2.1) \qquad \mu : \mathbb{G}_m \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad (\text{resp. } \mu_i : \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}_i \longrightarrow \mathbb{A}_i)$$

l'opération naturelle de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}$ (resp. sur $\mathbb{A}_i$) définie par $\mu(u,t) = ut$ (resp. $\mu_i(u,t_i) = ut_i$), notons

$$(7.2.2) \qquad \nu : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}$$

l'inclusion habituelle et

$$(7.2.3) \qquad a : s^{-1}(1) \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$$

la projection canonique.

LEMME 7.2.4. Considérons l'ensemble de données suivant : pour tout $i \in I$, soient $\mathcal{F}_i$ un E_λ-faisceau de type (*) sur $\mathbb{A}_i$, $\mathcal{G}_i$ un E_λ-faisceau sur $\mathbb{G}_m$ et $\alpha_i : \mu_i^* \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{G}_i \boxtimes \mathcal{F}_i$ un isomorphisme de E_λ-faisceaux sur $G_m \times \mathbb{A}_i$. Alors il existe un isomorphisme

$$\alpha : \overset{*}{\underset{i\in I}{}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \nu_!(\otimes_{i\in I} \mathcal{G}_i) \otimes R^{m-1}a_*(\boxtimes_{i\in I} \mathcal{F}_i | s^{-1}(1))$$

uniquement déterminé par l'ensemble de données considéré.

7.2.5. Prouvons 7.2.4. On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^I & \xrightarrow{\Delta \times id} & \mathbb{G}_m^I \times \mathbb{A}^I & \xrightarrow{\prod_{i\in I} \mu_i} & \mathbb{A}^I \\ \downarrow{\scriptstyle id\times s} & & & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ \mathbb{G}_m \times \mathbb{A} & & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & & \mathbb{A} \end{array}$$

et, d'après 7.1, la formation de $\overset{*}{\underset{i\in I}{}} \mathcal{F}_i = R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{F}_i)$ commute au changement de base ; donc, la flèche de changement de base par μ

$$\beta : \mu^* R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{F}_i) \longrightarrow R^{m-1}(id\times s)_*(\Delta\times id)^*(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mu_i^*\mathcal{F}_i)$$

est un isomorphisme ; par suite, si l'on compose β avec l'isomorphisme déduit, par $(\Delta\times id)^*$, de l'isomorphisme

$$\underset{i\in I}{\boxtimes} \alpha_i : \underset{i\in I}{\boxtimes} \mu_i^*\mathcal{F}_i \longrightarrow (\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{G}_i)\boxtimes(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{F}_i)$$

on obtient, compte-tenu de l'isomorphisme de Künneth, un isomorphisme

$$\gamma : \mu^* R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} (\underset{i\in I}{\otimes} \mathcal{G}_i)\boxtimes R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{F}_i) .$$

Soit $\sigma : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m\times\mathbb{A}$ la section définie par $\sigma(u) = (u,1)$; alors $\mu\circ\sigma = \nu$, donc on a un isomorphisme

$$\sigma^*(\gamma) : \nu^* R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} (\underset{i\in I}{\otimes} \mathcal{G}_i)\otimes(R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes} \mathcal{F}_i))_1 .$$

On conclut en invoquant une nouvelle fois la compatibilité au changement de base de 7.1 et la nullité de $\overset{*}{\underset{i\in I}{}} \mathcal{F}_i$ en 0 (cf. 7.1 (iii)).

7.3. Soit n un entier positif, premier à p, tel que k contienne toutes les racines n-ième de l'unité ; pour chaque $i \in I$, soient n_i un entier positif divisant n et $\chi_i : \mu_{n_i}(k) \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère non trivial ; nous noterons

$$(7.3.1) \qquad \prod_{i\in I} \chi_i : \mu_n(k) \longrightarrow E_\lambda^*$$

le caractère défini par

$$(\prod_{i\in I}\chi_i)(\zeta) = \prod_{i\in I}\chi_i(\zeta^{n/n_i})$$

pour tout $\zeta \in \mu_n(k)$. Pour chaque $i \in I$, nous noterons

$$\nu_i : \mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(k[u,u^{-1}]) \hookrightarrow \mathbb{A}_i$$

l'immersion ouverte usuelle.

LEMME 7.3.1. *Pour chaque* $i \in I$, *le* E_λ*-faisceau* (cf. (2.2.1))

$$(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u)$$

est de type (*) *et on a un isomorphisme canonique*

$$\overset{*}{\otimes}_{i\in I}(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u) \xrightarrow{\sim} \nu_! \mathcal{K}_n(\prod_{i\in I}\chi_i,u) \otimes R^{m-1}a_*(\boxtimes_{i\in I}(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u)|s^{-1}(1))$$

où $R^{m-1}a_*(\boxtimes_{i\in I}(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u)|s^{-1}(1))$ *est un* E_λ*-faisceau de rang* 1 *sur* $\mathrm{Spec}(k)$.

En effet, pour chaque $i \in I$, on a un isomorphisme canonique (cf. (2.2.3), (2.2.7))

$$\mu_i^*(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u) \simeq \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u) \boxtimes (\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u)$$

donc le lemme est conséquence de 7.2.4.

7.3.3. Supposons que k est une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et que n divise $q-1$. Alors le Frobenius géométrique F relatif à $\mathbb{F}_q$ agit sur le E_λ-vectoriel de dimension 1

$$R^{m-1}a_*(\boxtimes_{i\in I}(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u)|s^{-1}(1)) = H^{m-1}(s^{-1}(1), \boxtimes_{i\in I}(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u))$$

et on a le résultat suivant, dû à Deligne :

LEMME 7.3.4. *L'endomorphisme* F^* *du* E_λ*-espace vectoriel de dimension* 1, $H^{m-1}(s^{-1}(1), \boxtimes_{i\in I}(\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u))$, *est le nombre algébrique* q^{2m-2}/J *où* J *est la somme de Jacobi*

$$J = (-1)^{m-1} \sum_{\substack{t_i\in\mathbb{F}_q^* \\ \sum_{i\in I} t_i = 1}} \prod_{i\in I} \chi_i^{-1}(t_i^{(q-1)/n_i}) .$$

En particulier, si le caractère $\prod_{i\in I}\chi_i$ *de* $\mu_n(k)$ *est non trivial, ce rapport d'homothétie est pur de poids* m-1 *et, si le caractère* $\prod_{i\in I}\chi_i$ *de* $\mu_n(k)$ *est trivial, ce rapport d'homothétie est pur de poids* m .

En effet, d'après [1] 4.16, F^* agissant sur le E_λ-vectoriel de dimension 1 , $H_c^{m-1}(s^{-1}(1)\cap \mathbb{G}_m^I, \boxtimes_{i\in I} \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i^{-1},t_i))$, est l'homothétie de rapport J . Donc, par dualité de Poincaré, compte-tenu de (2.2.8), F^* agissant sur le E_λ-vectoriel de dimension 1 , $H^{m-1}(s^{-1}(1)\cap \mathbb{G}_m^I, \boxtimes_{i\in I} \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,t_i))$, est l'homothétie de rapport q^{2m-2}/J . Or 6.2.11, montre que la flèche de restriction

$$H^{m-1}(s^{-1}(1), \boxtimes_{i\in I} (\nu_i)_! \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,u)) \longrightarrow H^{m-1}(s^{-1}(1)\cap \mathbb{G}_m^I, \boxtimes_{i\in I} \mathcal{K}_{n_i}(\chi_i,t_i))$$

est un isomorphisme, d'où 7.3.4.

8. Pureté des sommes $S_{I,n}$ dans le cas général.

8.0. Nous allons, dans ce numéro, déduire 4.1 de 6.1 (nous supposons toujours que les c_i sont tous égaux à 1 (cf. 4.3.0)). Posons

$$\text{(8.0.1)} \qquad \begin{cases} I' = \{i \in I \mid a_i \neq 0\} \\ I'' = \{i \in I \mid a_i = 0\} \end{cases}$$

Rappelons (4.0.2) que V est l'hypersurface affine dans $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{I} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}[(y_i)_{i\in I}])$ d'équation $1+\sum_{i\in I} y_i^{d_i} = 0$. Soit $\circ$ un indice n'appartenant pas à I et soit

$$\text{(8.0.2)} \qquad V' \subset \mathrm{Spec}(\mathbf{F}[(y_i)_{i\in I'}, y_\circ])$$

le sous-schéma fermé d'équation $\sum_{i\in I'} y_i^{d_i} + y_\circ + 1 = 0$. Considérons le diagramme commutatif, à carré cartésien,

$$\text{(8.0.3)} \qquad \begin{array}{ccccc} & g & V & \xrightarrow{p} & \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}[(y_i)_{i\in I''}]) \\ \mathbb{A}^1_{\mathbf{F}} & & \downarrow h & & \downarrow k \\ & g' & V' & \xrightarrow{p'} & \mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}[t]) \end{array}$$

où les morphismes g, g', h, k, p, p' sont définis comme suit :

$$\text{(8.0.4)} \qquad \begin{cases} g((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i \quad \text{(cf. 4.0.3)} \\ g'((y_i)_{i\in I'}, y_\circ) = \sum_{i\in I'} a_i y_i \\ h((y_i)_{i\in I}) = ((y_i)_{i\in I}, \sum_{i\in I''} y_i^{d_i}) \\ k((y_i)_{i\in I''}) = \sum_{i\in I''} y_i^{d_i} \\ p((y_i)_{i\in I}) = (y_i)_{i\in I''} \\ p'((y_i)_{i\in I'}, y_\circ) = y_\circ \ . \end{cases}$$

Rappelons enfin que $\mathcal{G}$ désigne le E_λ-faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{L}(\psi, g)$, sur V et posons

$$\text{(8.0.5)} \qquad \mathcal{G}' = \mathcal{L}(\psi, g') \ ,$$

de sorte que $\mathcal{G}'$ est un E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V' et que l'on a (cf. (2.1.2))

(8.0.6) $$\mathcal{G} = h^*\mathcal{G}' \ .$$

8.1. Nous voulons déduire de 6.1 l'énoncé suivant :

8.1.0. Sous les hypothèses (A) et (B) de 4.0, pour tout caractère non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$, on a $H_c^i(V,\mathcal{G}) = 0$, si $i \neq \mathrm{card}(I)-1$, et les valeurs propres de F^* agissant sur $H_c^{\mathrm{card}(I)-1}(V,\mathcal{G})$ sont pures de poids $\mathrm{card}(I)-1$.

Or, par dualité de Poincaré, on a

(8.1.1) $$H_c^i(V,\mathcal{G}) = [H^{2(\mathrm{card}(I)-1)-i}(V,\mathcal{G}^\vee)]^\vee(1-\mathrm{card}(I))$$

et $\mathcal{G}^\vee = \mathcal{L}(\psi,g)^\vee = \mathcal{L}(\psi^{-1},g)$ (cf. (2.1.5)) donc il revient au même de déduire de 6.1 l'énoncé suivant :

8.1.2. Sous les hypothèses (A) et (B) de 4.0, pour tout caractère non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$, on a $H^i(V,\mathcal{G})$ si $i \neq \mathrm{card}(I)-1$, et les valeurs propres de F^* agissant sur $H^{\mathrm{card}(I)-1}(V,\mathcal{G})$ sont pures de poids $\mathrm{card}(I)-1$.

8.1.3. Il suffit de prouver 8.1.2 après extension préliminaire des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_{q_1} \subset \mathbb{F}$ où q_1 est une puissance de q, $q_1 = q^e$ (e entier $\geqslant 1$) ; si F_1 désigne le morphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q_1}$, on a en effet $F_1^* = (F^*)^e$ sur $H^*(V,\mathcal{G})$.

8.2. Pour déduire 8.1.2 de 6.1, nous allons analyser la cohomologie $H^*(V,\mathcal{G})$ à l'aide de la suite spectrale de Leray pour h

(8.2.1) $$E_2^{ij} = H^i(V',R^ih_*\mathcal{G}) \Longrightarrow H^{i+j}(V,\mathcal{G})$$

qui s'écrit encore, compte-tenu de (8.0.6),

(8.2.2) $$E_2^{ij} = H^i(V',\mathcal{G}'\otimes R^jh_*E_\lambda) \Longrightarrow H^{i+j}(V,\mathcal{G}) \ .$$

Le morphisme k se factorise en

(8.2.3) $$k \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in I''}]) \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(t_i)_{i\in I''}]) \\ \downarrow s \\ \mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[t]) \end{array} \right.$$

où $\pi((y_i)_{i\in I"}) = (y_i^{d_i})_{i\in I"}$ et $s((t_i)_{i\in I"}) = \sum_{i\in I"} t_i$.

LEMME 8.2.4. La flèche de changement de base relative au carré cartésien de (8.0.3),

(8.2.4.1) $$p'^* R^j k_* E_\lambda \longrightarrow R^j h_* E_\lambda$$

est un isomorphisme, pour tout $j \geqslant 0$.

En effet, π est un morphisme fini, donc la formation de $\pi_* E_\lambda$ commute à tout changement de base $S \longrightarrow \mathbb{A}^{I"}$. Il ne reste à voir que la formation de $R^j s_*(\pi_* E_\lambda)$ commute à tout changement de base $S \longrightarrow \mathbb{A}$. Or le morphisme s admet une compactification

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{I"} & \hookrightarrow & \bar{\mathbb{A}}^{I"} \\ & {\scriptstyle s}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \bar{s}} & \\ & \mathbb{A} & \end{array}$$

telle que $(\bar{\mathbb{A}}^{I"}, \bar{\mathbb{A}}^{I"} - \mathbb{A}^{I"})$ soit un $\mathbb{A}$-couple lisse (si l'on choisit un indice $i_o \in I"$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{I"} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{A} \times \mathbb{A}^{I"-\{i_o\}} \\ & {\scriptstyle s}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle pr_1} & \\ & \mathbb{A} & \end{array}$$

où $\alpha((t_i)_{i\in I"}) = (\sum_{i\in I"} t_i\ ,\ (t_i)_{i\in I"-\{i_o\}})$, est commutatif). D'autre part, $\pi_* E_\lambda$ est trivialisé par le revêtement fini π qui est, par hypothèse (A), de degré premier à p ; donc $\pi_* E_\lambda$ est modérément ramifié le long de $\bar{\mathbb{A}}^{I"} - \mathbb{A}^{I"}$ et le lemme résulte de [6] 1.3.3 (cet argument a été utilisé par Deligne pour prouver 7.1).

Compte-tenu de ce lemme, (8.2.2) se réécrit

(8.2.5) $$E_2^{ij} = H^i(V', \mathcal{G}' \otimes p'^* R^j k_* E_\lambda) \Longrightarrow H^{i+j}(V, \mathcal{G}) .$$

Désignons le groupe de Galois du revêtement fini π par

(8.2.6) $$G" = \prod_{i\in I"} \mu_{d_i}(\mathbb{F}) ;$$

pour tout caractère $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i\in I"}$ de $G"$, de support $K" = \{i \in I" | \chi_i \neq 1\}$, notons

$$(8.2.7)\quad \nu_{\underline{\chi}} : \mathbb{G}_m^{K"} \times \mathbb{A}^{I"-K"} \hookrightarrow \mathbb{A}^{I"} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(t_i)_{i\in I"}])$$

l'inclusion naturelle et $\mathcal{K}(\underline{\chi})$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{G}_m^{K"} \times \mathbb{A}^{I"-K"}$ défini par

$$(8.2.8)\qquad \mathcal{K}(\underline{\chi}) = \Big(\boxtimes_{k\in K"} \mathcal{K}_{d_k}(\chi_k, t_k)\Big) \boxtimes E_\lambda \ .$$

LEMME 8.2.9. Pour tous entiers $i,j \geqslant 0$, le terme E_2^{ij} de (8.2.5) admet la décomposition

$$(8.2.9.1)\qquad E_2^{ij} = \bigoplus_{\underline{\chi}\in\hat{G}"} H^i(V', \mathcal{G}' \otimes p'^* R^j s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi})) \ .$$

En effet, cela résulte aussitôt de la décomposition (6.2.6) de $\pi_* E_\lambda$.

8.3. Posons

$$(8.3.0)\quad d" = \mathrm{p.p.c.m}((d_i)_{i\in I"}) \ , \ r_i" = d"/d_i \ (i \in I").$$

Si $\underline{\chi}$ est un caractère de $G"$, de composantes χ_i $(i \in I")$, nous noterons, conformément à (7.3.1),

$$(8.3.1)\qquad \prod_{i\in I"} \chi_i : \mu_{d"}(\mathbb{F}) \longrightarrow E_\lambda^*$$

le caractère défini par $(\prod_{i\in I"} \chi_i)(\zeta) = \prod_{i\in I"} \chi_i(\zeta^{r_i"})$. Posons aussi

$$(8.3.2)\qquad m" = \mathrm{card}(I")$$

et rappelons que $\nu : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}$ désigne l'inclusion naturelle (7.2.2).

LEMME 8.3.3. Soit $\underline{\chi}$ un caractère de $\mathbb{G}"$ de support $K" \subset I"$. On a

(i) si $K" = \emptyset$,

$$R^j s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi}) = \begin{cases} E_\lambda & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

(ii) si $K" \neq \emptyset$ et si $K" \neq I"$,

$$R s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi}) = 0$$

dans $D_c^b(\mathbb{A}, E_\lambda)$;

(iii) si $K" = I"$,

$$R^j s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi}) = 0$$

pour tout $j \neq m"-1$ et on a un isomorphisme canonique

$$(8.3.3.1)\quad R^{m"-1}s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi}) \xrightarrow{\sim} \nu_!(\mathcal{K}_{d"}(\prod_{i\in I"} \chi_i, t)) \otimes H(\underline{\chi})$$

où l'on a posé, pour tout caractère $\underline{\chi}$ de $G"$, de support $I"$,

$$(8.3.3.2)\qquad H(\underline{\chi}) = H^{m"-1}(s^{-1}(1), (\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi})) \ .$$

Cela résulte aussitôt de 7.1 et 7.3.1.

LEMME 8.3.4. On a

$$R\Gamma(V', \mathcal{G}') = 0$$

dans $D_c^b(E_\lambda)$.

En effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V' & & \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \searrow^{g'} & \\ \mathbb{A}^{I'} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{A}^1_{\mathbf{F}} \end{array}$$

où $\alpha((y_i)_{i\in I'}, y_o) = (y_i)_{i\in I'}$ et $\beta((y_i)_{i\in I'}) = \sum_{i\in I'} a_i y_i$. Donc

$$\mathcal{G}' = \alpha^* \mathcal{L}(\psi, \beta) \ .$$

Comme α est un isomorphisme, on a

$$R\Gamma(V', \mathcal{G}') = R\Gamma(\mathbb{A}^{I'}, \mathcal{L}(\psi, \alpha))$$

et, par Künneth,

$$R\Gamma(V', \mathcal{G}') = \bigotimes_{i\in I'} R\Gamma(\mathbb{A}_i, \mathcal{L}(\psi, a_i y_i))$$

par suite 8.3.4 se déduit de l'assertion bien connue([1] 2.7)

$$R\Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbf{F}}, \mathcal{L}(\psi, ay)) = 0$$

pour $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$ non trivial et $a \in \mathbb{F}_q^*$.

En accord avec la notation (6.0.1), nous noterons

(8.3.5) $$\nu_{\{o\}} : V'^{\{o\}} \hookrightarrow V'$$

l'ouvert de V' défini par la condition $y_o \neq 0$.

PROPOSITION 8.3.6. *Le terme* E_2 *de la suite spectrale* (8.2.1) *de Leray pour* h *vérifie*

(i) *pour tout* $j \neq m"-1$ *et pour tout* i ,

$$E_2^{ij} = 0 ;$$

(ii) *pour tout* i , *on a une décomposition*

(8.3.6.1) $$E_2^{i,m"-1} = E'_i \oplus E"_i$$

où

(8.3.6.2) $$E'_i = \bigoplus_{\underline{\chi}} H^i(V'^{\{o\}}, \mathcal{K}_{d"}(\prod_{i\in I"} \chi_i, p') \otimes \nu^*_{\{o\}} \mathcal{G}') \otimes H(\underline{\chi}) ,$$

la somme étant étendue aux caractères $\underline{\chi}$ *de* $G"$, *de support* $I"$, *tels que* $\prod_{i\in I"} \chi_i$ *ne soit pas trivial, et où*

(8.3.6.3) $$E"_i = \bigoplus_{\underline{\chi}} H^{i-1}(V'-V'^{\{o\}}, \mathcal{G}') \otimes H(\underline{\chi}) ,$$

la somme étant étendue aux caractères $\underline{\chi}$ *de* $G"$, *de support* $I"$, *tels que* $\prod_{i\in I"} \chi_i$ *soit trivial*.

8.3.7. Prouvons 8.3.6. La partie (i) est conséquence immédiate de 8.2.9, 8.3.3 (i) et (ii) et 8.3.4. Pour la partie (ii), il résulte aussitôt de 8.2.9 et 8.3.3 (iii) que

$$E_2^{i,m"-1} = \bigoplus_{\substack{\underline{\chi}\in \hat{G}" \\ \mathrm{Supp}(\underline{\chi})=I"}} H^i(V', \nu_{\{o\}!}(\mathcal{K}_{d"}(\prod_{i\in I"} \chi_i, p')) \otimes \mathcal{G}') \otimes H(\underline{\chi}) .$$

Si $\prod_{i\in I"} \chi_i$ est non trivial, la flèche d'oubli des supports

$$\nu_{\{o\}!}(\mathcal{K}_{d"}(\prod_{i\in I"} \chi_i, p')) \longrightarrow R\,\nu_{\{o\}*}(\mathcal{K}_{d"}(\prod_{i\in I"} \chi_i, p'))$$

est un isomorphisme dans $D^b_c(V', E_\lambda)$ d'après 6.2.11. Si $\prod_{i\in I"} \chi_i$ est trivial, $\mathcal{K}_{d"}(\prod_{i\in I"} \chi_i, p') = E_\lambda$ et, comme $R\Gamma(V', \mathcal{G}') = 0$,

d'après 8.3.4, on a

$$R\Gamma(V'-V'^{\{o\}},\mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} R\Gamma(V',(\nu_{\{o\}!}E_\lambda)\otimes\mathcal{G}')[1] .$$

Ces deux dernières remarques permettent de conclure facilement.

8.3.8. Comme le diagramme (8.0.3) est défini sur $\mathbb{F}_q$, le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$, F^*, agit sur toute la suite spectrale (8.2.1) et sur les descriptions (8.2.2) et (8.2.5) du terme E_2 de cette suite spectrale ; toutes ces actions sont compatibles.

Précisons ce que devient l'action de Frobenius sur le terme E_2 de (8.2.1) dans la décomposition de ce terme E_2, décrite en 8.3.6. Soit q_1 une puissance de q, $q_1 = q^e$, telle que d'' (cf. (8.3.1)) divise q_1-1. La décomposition (6.2.6) de π_*E_λ,

$$\pi_*E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi}\in\hat{G}''} (\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi})$$

est alors définie sur $\mathbb{F}_{q_1}$ (cf. 2.2.10). Soit F_1 le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q_1}$. Alors F_1^* agit sur le terme E_2 de (8.2.1) et cette action coïncide avec celle de $(F^*)^e$. D'autre part F_1^* agit sur chaque facteur des sommes directes (8.3.6.2) et (8.3.6.3), donc sur E_i' et E_i'', et, en remontant toutes les étapes de la preuve de 8.3.6, on vérifie aussitôt que la décomposition (8.3.6.1) est F_1^*-équivariante.

PROPOSITION 8.4. *Soit* $\underline{\chi}$ *un caractère de* G'' *de support* I''. *Alors* :

(i) *si* $\prod_{i\in I''} \chi_i$ *est non trivial, on a*

$$H^i(V'^{\{o\}}, \mathcal{K}_{d''}(\prod_{i\in I''}\chi_i, p')\otimes \nu_{\{o\}}^*\mathcal{G}') = 0 ,$$

pour tout $i \neq \mathrm{card}(I')$, *et les valeurs propres de* F_1^* *agissant sur*

$$H^{\mathrm{card}(I')}(V'^{\{o\}}, \mathcal{K}_{d''}(\prod_{i\in I''}\chi_i, p')\otimes \nu_{\{o\}}^*\mathcal{G}')$$

sont (*relativement à* $\mathbb{F}_{q_1}$) *pures de poids* $\mathrm{card}(I')$;

(ii) *si* $\prod_{i\in I''} \chi_i$ *est trivial, on a*

$$H^i(V-V'^{\{o\}}, \mathcal{G}') = 0 ,$$

pour tout $i \neq \mathrm{card}(I')-1$, *et les valeurs propres de* F^* *agissant sur*

$$H^{\mathrm{card}(I')-1}(V'-V'^{\{o\}}, \mathcal{G}')$$

sont pures de poids $\mathrm{card}(I')-1$.

8.4.1. Prouvons 8.4. Pour les deux assertions (i) et (ii), 3.2.1 nous ramène à montrer que les flèches d'oubli des supports $H^i_c \longrightarrow H^i$ $(i \in \mathbb{N})$ sont des isomorphismes, mais, dans les deux cas, cela va résulter de 6.1.

Pour l'assertion (i), désignons par d le p.p.c.m. des d_i $(i \in I)$ et posons $a_o = 0$, $d_o = 1$; les hypothèses (A) et (B) de 4.0 assurent que d , $(d_i)_{i\in I'\cup\{o\}}$ et $(a_i)_{i\in I'\cup\{o\}}$ vérifient les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0 ; comme d'' divise d , on peut appliquer 6.1 au caractère du groupe

$$\prod_{i\in I'\cup\{o\}} \mu_{d/d_i}(\mathbb{F})$$

dont le support est $\{o\}$ et dont la composante d'indice o est le composé

$$\mu_{d/d_o}(\mathbb{F}) = \mu_d(\mathbb{F}) \xrightarrow{[d/d'']} \mu_{d''}(\mathbb{F}) \xrightarrow{\prod_{i\in I''} \chi_i} E_\lambda^*$$

et cela entraîne la conclusion (*c'est ici que servent les possibilités ouvertes en* 6.1 *d'avoir un* d *multiple arbitraire du p.p.c.m. des* d_i *et d'avoir un* a_i *nul*).

Pour l'assertion (ii), désignons toujours par d le p.p.c.m. des d_i $(i \in I)$; les hypothèses (A) et (B) de 4.0 assurent que d , $(d_i)_{i\in I'}$ et $(a_i)_{i\in I'}$ vérifient les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0 ; la conclusion résulte, là encore, aussitôt de 6.1.

8.5. Achevons la preuve de 4.1. Il s'agit, comme on l'a vu en 8.1 de prouver 8.1.2. Regroupant 8.3.6 et 8.4, on voit que la suite spectrale 8.2.1 dégénère en E_2 et que son terme E_2 se réduit à

$$E_2^{\mathrm{card}(I'),\mathrm{card}(I")-1}$$

de sorte que $H^i(V,\mathcal{G}) = 0$ pour $i \neq \mathrm{card}(I)-1$ (I est réunion disjointe de I' et $I"$) et que la flèche canonique

$$E_2^{\mathrm{card}(I'),\mathrm{card}(I")-1} \longrightarrow H^{\mathrm{card}(I)-1}(V,\mathcal{G})$$

est un isomorphisme ; compte-tenu de 8.3.8, il résulte de 8.4, 7.3.4 et 8.3.6 (ii) que les valeurs propres de F_1^* agissant sur

$$E_2^{\mathrm{card}(I'),\mathrm{card}(I")-1}$$

sont pures de poids $\mathrm{card}(I)-1$ (relativement à $\mathbf{F}_{q_1}$), donc il en est de même des valeurs propres de F_1^* agissant sur

$$H^{\mathrm{card}(I)-1}(V,\mathcal{G})$$

et on conclut par la remarque 8.1.3.

9. Modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j g_! E_\lambda$ et conséquences pour le calcul de $\chi_c(V,\mathcal{G})$.

9.0. Reprenons les notations de 4.0 avec tous les c_i égaux à 1 (cf. 4.3.0) : V est l'hypersurface dans $\mathbb{A}^I_{\mathbb{F}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in I}])$ d'équation $1 + \sum_{i\in I} y_i^{d_i} = 0$, $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ est le morphisme défini par $g((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i$ et $\mathcal{G}$ est le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V défini par $\mathcal{G} = \mathcal{L}(\psi, g)$.

REMARQUE 9.0.1. Tout ce qui suit reste valable si l'on remplace $\mathbb{F}$ par un corps algébriquement clos, de caractéristique p, arbitraire, les a_i $(i \in I)$ étant alors des éléments quelconques de ce corps.

Rappelons brièvement la méthode de N.M. Katz pour le calcul de $\chi(V,\mathcal{G})$ (cf. [7]). La suite spectrale de Leray pour le morphisme $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ et le E_λ-faisceau $\mathcal{G}$,

$$E_2^{ij} = H^i(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* \mathcal{G}) \Longrightarrow H^{i+j}(V,\mathcal{G})$$

donne

$$\chi(V,\mathcal{G}) = \sum_j (-1)^j \chi(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* \mathcal{G}) \quad (9.0.2)$$

D'autre part, par définition (2.1.1) de $\mathcal{G}$, on a

$$\mathcal{G} = g^*[\psi^{-1}(\mathcal{L})]$$

donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$R^j g_* \mathcal{G} = R^j g_* E_\lambda \otimes_{E_\lambda} \psi^{-1}(\mathcal{L}) .$$

Si l'on montre que, pour chaque entier $j \geqslant 0$, le E_λ-faisceau $R^j g_* E_\lambda$ sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ est modéré à l'infini de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, on aura (d'après [7] 4.8.2), pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\chi(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* \mathcal{G}) = \chi(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* E_\lambda) - \dim_{E_\lambda}((R^j g_* E_\lambda)_{\bar\eta})$$

où $\bar\eta$ est un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ et, par suite, on aura (grâce à (9.0.2))

(9.0.3) $$\chi(V,\mathcal{G}) = \chi(V,E_\lambda) - \chi(V_{\bar\eta},E_\lambda)$$

où $V_{\bar\eta}$ désigne la fibre du morphisme g au point géométrique générique $\bar\eta$ de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$.

Pour établir 4.2, nous allons :

(a) prouver la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^jg_*E_\lambda$ $(j\in\mathbb{N})$;

(b) calculer, en termes des d_i $(i\in I)$, les caractéristiques d'Euler-Poincaré λ-adique de V et $V_{\bar\eta}$.

La suite du numéro 9 est consacrée à (a) et le numéro 10 à (b).

PROPOSITION 9.1. *Sous les hypothèses* (A) *et* (B) *de* 4.0, *les* E_λ-*faisceaux* $R^jg_*E_\lambda$ $(j\in\mathbb{N})$ *sur* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ *sont modérés à l'infini*.

Nous avons déduit 4.1 de 5.2 (via 6.1), de la même manière nous allons déduire 9.1 de l'énoncé 9.1.1 ci-dessus (via son corollaire 9.1.2).

Rappelons ((5.0.2) et (5.0.3)) que U désigne l'hypersurface de Fermat dans $\mathbb{A}^I_{\mathbb{F}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i\in I}])$ d'équation $\sum_{i\in I} x_i^d+1 = 0$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ le morphisme défini par $f((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i x_i^{r_i}$.

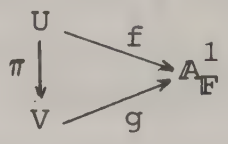
PROPOSITION 9.1.1. *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (B_1) *de* 5.1, *les* E_λ-*faisceaux* $R^jf_*E_\lambda$ $(j\in\mathbb{N})$ *sur* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ *sont modérés à l'infini de* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$.

Nous démontrerons 9.1.1 en 9.3. Déduisons de 9.1.1 un corollaire. Prenons pour d un multiple commun des d_i $(i\in I)$ et $r_i = d/d_i$ $(i\in I)$. Rappelons ((6.0.2), (6.0.3) et (6.0.1)) que G désigne le groupe fini $\prod_{i\in I} \mu_{r_i}(\mathbb{F})$, $\mathcal{K}(\underline{\chi})$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur l'ouvert $v_K = v_{\underline{\chi}} : V^K \hookrightarrow V$, défini par $\mathcal{K}(\underline{\chi}) = \bigotimes_{k\in K} \mathcal{K}_{r_k}(\chi_k,y_k)$, où $\underline{\chi}$ est un caractère de G de support K.

COROLLAIRE 9.1.2. *Sous les hypothèses* (A_2) *et* (B_2) *de* 6.0, *pour tout caractère* $\underline{\chi}$ *de* G, *de support* $K\subset I$, *les* E_λ-*faisceaux*

$R^j g_*(\nu_{\underline{\chi}})_! K(\underline{\chi})$ $(j \in \mathbb{N})$ <u>sont modérés à l'infini de</u> $\mathbb{A}^1_F$.

En effet, on a, en vertu du diagramme commutatif (6.2.2)



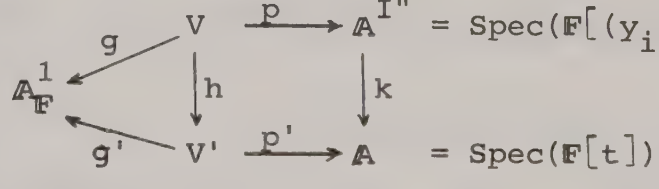
$$R^j f_* E_\lambda = R^j g_* \pi_* E_\lambda$$

et en tenant compte de la décomposition ((6.2.6),(6.2.10))

$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi} \in \hat{G}} (\nu_{\underline{\chi}})_! K(\underline{\chi})$$

on voit que, chaque E_λ-faisceau $R^j g_*(\nu_{\underline{\chi}})_! K(\underline{\chi})$ est un facteur direct de $R^j f_* E_\lambda$ donc est modérément ramifié à l'infini de $\mathbb{A}^1_F$, puisque $R^j f_* E_\lambda$ l'est (on rappelle que pour d un multiple des d_i $(i \in I)$ et $r_i = d/d_i$ $(i \in I)$, les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0 impliquent les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1).

9.2. Déduisons 9.1 de 9.1.2. Considérons le diagramme (8.0.3), à carré cartésien,



où V' désigne l'hypersurface dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i \in I'}, y_o])$ d'équation $\sum_{i \in I'} y_i^{d_i} + y_o + 1 = 0$, que $g'((y_i)_{i \in I'}, y_o) = \sum_{i \in I} a_i y_i$ et que $h((y_i)_{i \in I}) = ((y_i)_{i \in I'}, \sum_{i \in I''} y_i^{d_i})$.

On a une suite spectrale de foncteurs composés $(g = g' \circ h)$:

$$(9.2.1) \qquad E_2^{ij} = R^i g'_* R^j h_* E_\lambda \Longrightarrow R^{i+j} g_* E_\lambda \ ;$$

pour prouver 9.1, il suffit alors de prouver la modération à l'infini des E_λ-faisceaux E_2^{ij} $(i,j \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{A}^1_F$, en vertu du résultat suivant :

LEMME 9.2.2. Soit I le groupe d'inertie d'un trait strictement local et soit P sa partie sauvage, i.e. son pro-p-groupe de Sylow, où p est la caractéristique résiduelle du trait. Soit

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de représentations ℓ-adiques de I. Pour que P agisse trivialement sur V, il faut et il suffit que P agisse trivialement sur V' et V''.

Le point est que, pour toute représentation ℓ-adique $\rho : I \longrightarrow GL(V)$, $\rho(P)$ est fini (P est un pro-p-groupe avec $\ell \neq p$), donc que, en tant que représentation de P, V est semi-simple.

9.2.3. Prouvons la modération de $\underline{E}_2^{ij} = R^i g_!' R^j h_* E_\lambda$ $(\forall i,j \in \mathbb{N})$. Rappelons que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la flèche de changement de base (8.2.4.1)

$$p'^* R^j k_* E_\lambda \longrightarrow R^j h_* E_\lambda$$

est un isomorphisme et que $R^j k_* E_\lambda$ admet la décomposition (cf. 8.2.9) :

$$R^j k_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi}} R^j s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi}) ,$$

où $\underline{\chi}$ parcourt les caractères du groupe $G'' = \prod_{i \in I''} \mu_{d_i}(\mathbb{F})$ (s, $\nu_{\underline{\chi}}$ et $\mathcal{K}(\underline{\chi})$ étant définis respectivement en (8.2.3), (8.2.7) et (8.2.8)). Les E_λ-faisceaux $R^j s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi})$ ($j \in \mathbb{N}$, $\underline{\chi} \in \hat{G}''$) sont calculés en 8.3.3 : $R^j s_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi})$ est isomorphe (non canoniquement à l'un des quatre E_λ-faisceaux suivants

(i) le E_λ-faisceau nul sur $\mathbb{A}$,

(ii) le E_λ-faisceau constant de valeur E_λ sur $\mathbb{A}$,

(iii) le E_λ-faisceau $\nu_!(\mathcal{K}_{d''}(\theta,t))$, où $\theta : \mu_{d''}(\mathbb{F}) \longrightarrow E_\lambda^*$ est un caractère non trivial,

(iv) le E_λ-faisceau $\nu_! E_\lambda$.

On doit donc montrer que les E_λ-faisceaux sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ $R^j g'_* E_\lambda$, $R^j g'_*(v_{\{o\}})_! \mathcal{K}_{d''}(\theta,p')$ et $R^j g'_*(v_{\{o\}})_! E_\lambda$ sont modérés à l'infini de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, où $v_{\{o\}} : V'^{\{o\}} \hookrightarrow V'$ est l'ouvert de V' défini par $y_o \neq 0$. Compte-tenu de 9.2.2 et du triangle distingué dans $D^b_c(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, E_\lambda)$

$$\begin{array}{ccc} & & R\tilde{g}'_* E_\lambda \\ & \overset{+1}{\swarrow} & \nwarrow \\ Rg'_*(v_{\{o\}})_! E_\lambda & \longrightarrow & Rg'_* E_\lambda \end{array}$$

où $\tilde{g}' : V' - V'^{\{o\}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ est la restriction de $g' : V' \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ au fermé de V' défini par $y_o = 0$, il revient au même de montrer la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j g'_* E_\lambda$, $R^j g'_*(v_{\{o\}})_! \mathcal{K}_{d''}(\theta,p'$ et $R^j \tilde{g}'_* E_\lambda$. Mais la modération à l'infini de ces E_λ-faisceaux est conséquence directe de 9.2.1 (même argument qu'en 8.4.1).

9.3. Prouvons 9.1.1. Nous devons prouver, sous les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1, la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j f_* E_\lambda$ sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$.

9.3.0. Nous allons voir qu'il revient au même de prouver, toujours sous les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1, la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j f_! E_\lambda$ sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$. En effet, U (resp. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$) étant un $\mathbb{F}$-schéma lisse de dimension $m-1$, où $m = \mathrm{card}(I)$, (resp. 1), $E_\lambda(m-1)[2(m-1)]$ (resp. $E_\lambda(1)[2]$) est le complexe dualisant de U (resp. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$) ; par suite, on a un isomorphisme canonique,

$$Rf_* R\underline{\mathrm{Hom}}(E_\lambda, E_\lambda(m-1)[2(m-1)]) \simeq R\underline{\mathrm{Hom}}(Rf_! E_\lambda, E_\lambda(1)[2])$$

dans $D^b_c(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, E_\lambda)$, autrement dit, une suite spectrale de E_λ-faisceaux

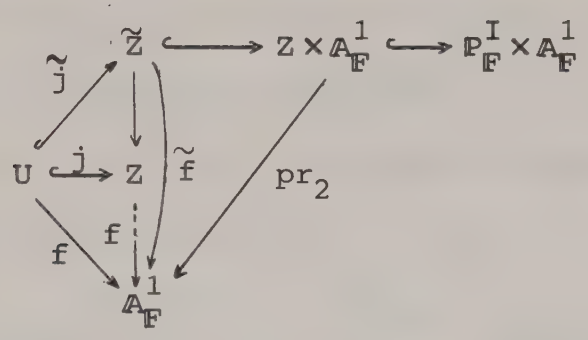
$$\underline{E}_2^{ij} = \underline{\mathrm{Ext}}^i(R^{-j} f_! E_\lambda, E_\lambda) \Longrightarrow R^{i+j+2(m-2)} f_* E_\lambda(m-2) .$$

Les $\underline{E}_2^{ij}$ pour $i > 0$ sont concentrés sur un ensemble fini de points fermés de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ (le lieu de non lissité des E_λ-faisceaux $R^j f_! E_\lambda$), donc ils sont automatiquement modérés à l'infini ; les

$\underline{E}_2^{\circ j} = \underline{\mathrm{Hom}}(R^{-j}f_!E_\lambda, E_\lambda)$ sont modérés à l'infini dès que les $R^jf_!E_\lambda$ le sont. Donc, le lemme 9.2.2 montre que les $R^jf_*E_\lambda$ sont modérés à l'infini dès que les $R^jf_!E_\lambda$ le sont (la réciproque, qui ne nous servira pas, peut se montrer de la même manière).

9.3.1. Pour prouver la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^jf_!E_\lambda$, nous allons compactifier f. Rappelons ((5.1.1) et (5.1.2)) que Z désigne l'hypersurface dans $\mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[X_o,(X_i)_{i\in I}])$ d'équation $\sum_{i\in I} X_i^d + X_o^d = 0$ et que $j : U \hookrightarrow Z$ est l'immersion ouverte qui identifie U à la carte $X_o \neq 0$ de Z. Le morphisme $f : U \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ définit alors une fonction rationnelle $f : Z \dashrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, dont on note

(9.3.1.1)



la variété d'incidence ; si on pose

(9.3.1.2) $$n = \inf\{\nu = 1,\dots,N \mid I'_\nu = \emptyset\}$$

(on rappelle que $r_1 > r_2 > \dots > r_N \geqslant 1$ sont les valeurs distinctes prises par les r_i $(i \in I)$, que $I'_\nu = \{i \in I \mid r_i = r_\nu\}$ et que $I'_\nu = \{i \in I_\nu \mid a_i \neq 0\}$), alors $\tilde{Z}$ est le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[X_o,(X_i)_{i\in I}]) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[t])$ défini par les équations

(9.3.1.3) $$\begin{cases} \sum_{i\in I} X_i^d + X_o^d = 0 \\ \sum_{\nu=n}^{N} \left(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\right) X_o^{r_n - r_\nu} - t X_o^{r_n} = 0 \end{cases}$$

et $\tilde{j} : U \hookrightarrow \tilde{Z}$ est l'immersion ouverte qui identifie U à l'ouvert de $\tilde{Z}$ déterminé par la condition $X_o \neq 0$, autrement dit

$\tilde{j}(x) = (j(x), f(x))$ pour tout $x \in U$. Le fermé de $\tilde{Z}$,

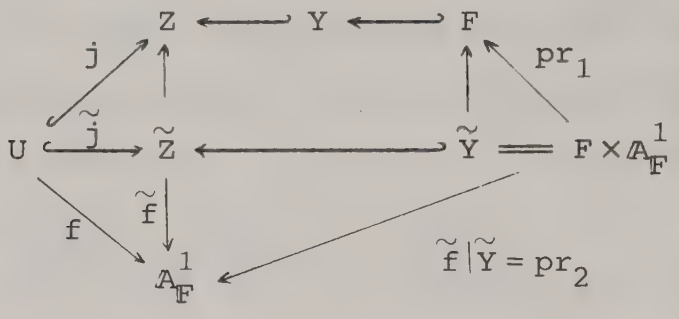
$$\tilde{Y} = \tilde{Z} - U , \tag{9.3.1.4}$$

i.e. le fermé de $\tilde{Z}$ d'équation $X_o = 0$, n'est autre que le produit de $\mathbb{A}^1_F$ par le fermé F de Z d'équations

$$\sum_{i \in I'_n} a_i X_i^{r_n} = X_o = 0 .$$

On a donc le diagramme commutatif

(9.3.1.5)



et la suite exacte longue

$$\longrightarrow R^j f_! E_\lambda \longrightarrow R^j \tilde{f}_* E_\lambda \longrightarrow R^j (\tilde{f}|\tilde{Y})_* E_\lambda \longrightarrow R^{j+1} f_! E_\lambda \longrightarrow \cdots \tag{9.3.1.6}$$

où les E_λ-faisceaux $R^j(\tilde{f}|\tilde{Y})_* E_\lambda$ sont constants de valeur $H^j(F, E_\lambda)$ $(\forall j \in \mathbb{N})$. Il résulte de 9.2.2 que les $R^j f_! E_\lambda$ sont modérés à l'infini de $\mathbb{A}^1_F$ si et seulement si les $R^j \tilde{f}_* E_\lambda$ le sont.

9.3.2. Soit $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[[\mu]])$ le complété de $\mathbb{A}^1_F$ à l'infini ($\mu = 1/t$ est une coordonnée locale à l'infini de $\mathbb{A}^1_F = \mathrm{Spec}(F[t])$) et soit

$$Z \subset \mathbb{P}^I_F \times \mathcal{S} \tag{9.3.2.1}$$

le sous-schéma fermé d'équations

$$\begin{cases} \sum_{i \in I} X_i^d + X_o^d = 0 \\ \mu \left[\sum_{\nu=n}^{N} \left(\sum_{i \in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu} \right) X_o^{r_n - r_\nu} \right] - X_o^{r_n} = 0 \end{cases} \tag{9.3.2.2}$$

(Z est aussi un sous-schéma fermé de $Z \times \mathcal{S}$). Nous noterons s le point fermé de $\mathcal{S}$, η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique

localisé en η , $I = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ le groupe d'inertie de $\mathcal{Y}$ correspondant, Z_z et $Z_{\bar{\eta}}$ les fibres de la projection $Z \longrightarrow \mathcal{Y}$ en s et $\bar{\eta}$ respectivement.

Le groupe d'inertie I agit sur la cohomologie $H^*(Z_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$ et nous voulons montrer que cette action est modérée ($H^j(Z_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$ est la fibre de $R^j\tilde{f}_* E_\lambda$ en $\bar{\eta}$, vu comme point géométrique de $A^1_{\mathbb{F}}$). La suite spectrale des cycles évanescents [3]

$$E_2^{ij} = H^i(Z_s, R^j\psi_\eta(E_\lambda)) \Longrightarrow H^{i+j}(Z_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$$

et 9.2.2 nous ramène à montrer que l'action de I sur les faisceaux $R^j\psi_\eta(E_\lambda)$ est modérée. Donc, compte-tenu de 9.3.1, la proposition 9.1.1 est conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION 9.3.3. Sous les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1, pour tout point fermé z de Z_s , le groupe d'inertie I agit sur les E_λ-vectoriels

$$(R^j\psi_\eta(E_\lambda))_z = H^j(Z_{(z)\bar{\eta}}, E_\lambda) \qquad (j \in \mathbb{N})$$

à travers un groupe fini, d'ordre premier à la caractéristique p de $\mathbb{F}$ ($Z_{(z)\bar{\eta}}$ désignant la fibre en $\bar{\eta}$ de l'hensélisé $Z_{(z)}$ de Z en z).

9.3.4. Prouvons 9.3.3. On considère Z comme le sous-schéma fermé de $Z \times \mathcal{Y}$ défini par l'équation

$$\mu\Big[\sum_{\nu=n}^{N} \Big(\sum_{i \in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\Big) X_o^{r_n - r_\nu}\Big] - X_o^{r_n} = 0 \ .$$

Soit z un point fermé de Z_s , alors μ et X_o s'annulent en z . Vu l'hypothèse (B_1) de 5.1, il existe au moins un indice $i \in I' = \bigcup_{\nu=n}^{N} I'_\nu$ tel que X_i ne s'annule pas en z . Par suite, il existe un unique $m \in \{n, \ldots, N\}$ tel que

(i) X_i s'annule en z pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = n, \ldots, m-1$;

(ii) X_i ne s'annule pas en z pour au moins un $i \in I'_m$.

Distinguons alors deux cas :

(a) $\sum_{i\in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ ne s'annule pas en z : alors choisissons un indice $i_m \in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z ; la fonction rationnelle sur $Z\times\mathcal{Y}$,

$$\eta = \frac{\prod_{\nu=m}^{N} X_o^{r_m - r_\nu}\left(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\right)}{X_{i_m}^{r_m}} ,$$

est définie dans un voisinage de z et ne s'annule pas en z ; de plus, localement en z , Z est défini dans $Z\times\mathcal{Y}$ par l'équation

$$\mu\left[\prod_{\nu=n}^{m-1}\left(\sum_{i\in I'_\nu} a_i\left(\frac{X_i}{X_{i_m}}\right)^{r_\nu}\right)\left(\frac{X_o}{X_{i_m}}\right)^{r_n - r_\nu} + \left(\frac{X_o}{X_{i_m}}\right)^{r_n - r_m}\eta\right] - \left(\frac{X_o}{X_{i_m}}\right)^{r_n} = 0 .$$

Comme $(r_m,p) = 1$ (d'après (A_1)), le revêtement de Kummer

$$\pi : (Z',z') \longrightarrow (Z\times\mathcal{Y},z)$$

d'équation

$$\zeta^{r_m} = \eta$$

est étale en z' (le choix de z' correspond au choix d'une racine r_m-ième de l'unité de $\eta(z)$), donc quitte à restreindre Z' est étale partout. Choisissons, pour chaque $i \in I'_\nu$, $\nu = n,\ldots,m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i et considérons les fonctions sur Z' , s'annulant en z' ,

$$u_o = \zeta^{-1}\frac{X_o}{X_{i_m}}$$

et

$$u_i = a'_i\zeta^{-1}\frac{X_i}{X_{i_m}} \qquad (i \in I'_\nu ,\ \nu = n,\ldots,m-1) ;$$

soit $\mathbb{A}$ l'espace affine sur F de dimension $1 + \sum_{\nu=n}^{m-1} \mathrm{card}(I'_\nu)$ et soit

$$(\underline{u},\mu) : (Z',z') \longrightarrow (\mathbb{A}\times\mathcal{Y},0)$$

le morphisme de composantes u_o , les u_i ci-dessus et μ .

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (Z',z') & \\ {\scriptstyle\pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle(\underline{u},u)} \\ (Z\times\mathcal{Y},z) & & (\mathbb{A}\times\mathcal{Y},0) \end{array}$$

est un système de coordonnées locales sur $Z\times\mathcal{Y}$ centré en z (au sens de (5.3.0)), si $\mathcal{X}$ est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}\times\mathcal{Y}$ d'équation

$$u\Big[\Big(\sum_{\nu=n}^{m-1}\Big(\sum_{i\in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\Big)u_o^{r_n-r_\nu}\Big)+u_o^{r_n-r_m}\Big]-u_o^{r_n}=0\ ,$$

on a

$$\pi^{-1}(Z)=(\underline{u},u)^{-1}(\mathcal{X})$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z' & & \\ & {\scriptstyle\pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle(\underline{u},u)} & \\ z\in Z\subset Z\times\mathcal{Y} & & & & \mathbb{A}\times\mathcal{Y}\supset\mathcal{X}\ni 0 \\ & {\scriptstyle pr_2}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle pr_2} & \\ & & \mathcal{Y} & & \end{array}$$

commute. Par suite, il résulte de ([3] 2.1.7.2) que l'on a un isomorphisme de $E_\lambda[I]$-modules

$$H^*(Z_{(z)\bar\eta},E_\lambda)\simeq H^*(\mathcal{X}_{(o)\bar\eta},E_\lambda) \qquad (9.3.4.1)$$

(b) $\sum_{i\in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ <u>s'annule en</u> z : alors, choisissons un indice $i_m\in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z et choisissons, pour tout $i\in I'_\nu$, $\nu=n,\dots,m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i ; les fonctions rationnelles

$$u_o=\frac{X_o}{X_{i_m}}\ ,$$

$$u_i=a'_i\,\frac{X_i}{X_{i_m}}$$

et

$$v = \frac{\sum_{\nu=m}^{N} X_o^{r_m - r_\nu} \left(\sum_{i \in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu} \right)}{X_{i_m}^{r_m}}$$

sont définis dans un voisinage de z dans $Z \times \mathcal{Y}$ et s'annulent en z. Soit $\mathbb{A}$ l'espace affine sur $\mathbb{F}$ de dimension $2 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \mathrm{card}(I'_\nu)$, alors l'hypothèse (B_1) de 5.1 assure que le morphisme

$$(\underline{u}, \mu) : (Z', z) \longrightarrow (\mathbb{A} \times \mathcal{Y}, 0)$$

de composantes u_o, v, les u_i $(i \in I'_\nu$, $\nu = n, \ldots, m-1)$ ci-dessus et μ, défini sur un voisinage de Zariski convenable Z' de z dans $Z \times \mathcal{Y}$, est lisse, de sorte que

$$\begin{array}{ccc} & (Z', z) & \\ \swarrow & & \searrow^{(\underline{u}, \mu)} \\ (Z \times \mathcal{Y}, z) & & (\mathbb{A} \times \mathcal{Y}, 0) \end{array}$$

est un système de coordonnées locales sur $Z \times \mathcal{Y}$, centré en z (au sens de (5.3.0)) ; de plus, si $\mathcal{X}$ est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A} \times \mathcal{Y}$ d'équation

$$\mu\left[\left(\sum_{\nu=n}^{m-1} \left(\sum_{i \in I'_\nu} u_i^{r_\nu} \right) u_o^{r_n - r_\nu} \right) + v . u_o^{r_n - r_m} \right] - u_o^{r_n} = 0 ,$$

on a

$$Z \cap Z' = (\underline{u}, \mu)^{-1}(\mathcal{X})$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z' & & \\ & \swarrow & & \searrow^{(\underline{u}, \mu)} & \\ z \in Z \subset Z \times \mathcal{Y} & & & & \mathbb{A} \times \mathcal{Y} \supset \mathcal{X} \ni 0 \\ & \searrow_{pr_2} & & \swarrow_{pr_2} & \\ & & \mathcal{Y} & & \end{array}$$

commute. Par suite, il résulte de ([3] 2.1.7.2) que l'on a un isomorphisme de $E_\lambda[I]$-modules

$$H^*(Z_{(z)\bar{\eta}},E_\lambda) \simeq H^*(\mathcal{X}_{(o)\bar{\eta}},E_\lambda) \quad . \tag{9.3.4.2}$$

Pour prouver 9.3.3, on est ramené par (9.3.4.1) et (9.3.4.2) à montrer le lemme suivant :

LEMME 9.3.5. *Soient* $m \geqslant n \geqslant 1$ *deux entiers,* $(r_n,\dots,r_m)$ *une suite d'entiers positifs, premiers à* p *, strictement décroissante, et* $(I'_\nu)_{\nu=n,\dots,m-1}$ *une famille finie d'ensembles finis non vides, deux à deux disjoints. Considérons les deux situations suivantes :*

(i) $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}[u_o,(u_i)_{i\in I'_\nu,\nu=n,\dots,m-1}])$ *et* $\mathcal{X}\subset\mathbb{A}\times\mathcal{Y}$ *est le sous-schéma fermé défini par l'équation*

$$\mu\Big[\Big(\sum_{\nu=n}^{m-1}\Big(\sum_{i\in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\Big)u_o^{r_n-r_\nu}\Big)+u_o^{r_n-r_m}\Big]-u_o^{r_n}=0$$

(ii) $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}[u_o,v,(u_i)_{i\in I'_\nu,\nu=n,\dots,m-1}])$ *et* $\mathcal{X}\subset\mathbb{A}\times\mathcal{Y}$ *est le sous-schéma fermé défini par l'équation*

$$\mu\Big[\Big(\sum_{\nu=m}^{n-1}\Big(\sum_{i\in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\Big)u_o^{r_n-r_\nu}\Big)+vu_o^{r_n-r_m}\Big]-u_o^{r_n}=0 \quad .$$

Dans ces deux situations l'action du groupe d'inertie I *de* $\mathcal{Y}$ *sur* $H^*(\mathcal{X}_{(o)\bar{\eta}},E_\lambda)$ *est modérée* ($\mathcal{X}_{(o)\bar{\eta}}$ *désigne la fibre en* $\bar{\eta}$ *de l'hensélisé de* $\mathcal{X}$ *en l'origine* 0 *de* $\mathbb{A}\times\{s\}$ *, pour la projection* $\mathcal{X}_{(o)} \longrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{A}\times\mathcal{Y} \xrightarrow{pr_2} \mathcal{Y}$). *Plus précisément, cette action se factorise à travers l'unique quotient fini cyclique de* I *, d'ordre le* p.p.c.m. r *des* $r_n,r_{n+1},\dots,r_m$.

9.3.5.1. Nous allons prouver 9.3.5 par un argument d'homotopie (cf. [7], preuve de 5.4.2). Soit T une indéterminée et soit

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}(T)[[\mu]]) \quad .$$

Nous noterons $\tilde{0}$ le point $(0,\tilde{s})$ de $\mathbb{A}\times_{\mathbf{F}}\tilde{\mathcal{Y}}$, où 0 est l'origine de l'espace affine $\mathbb{A}$ et où $\tilde{s}$ est le point fermé de $\tilde{\mathcal{Y}}$. Soit, pour $\alpha = 1,2$, $\mathcal{X}_\alpha$ le $\tilde{\mathcal{Y}}$-schéma déduit de $\mathcal{Y}$-schéma $\mathcal{X}$ par

l'extension de $\mathbb{F}$-traits

$$\theta_\alpha : \widetilde{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{V}$$

définie par

$$\theta_\alpha(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{si } \alpha = 1 \\ T^{r}\mu & \text{si } \alpha = 2 \end{cases} .$$

Dans la situation (i), $\mathcal{X}_1$ (resp. $\mathcal{X}_2$) est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \widetilde{\mathcal{V}}$ d'équation

$$\mu\Big[\Big(\sum_{\nu=n}^{m-1}\Big(\sum_{i\in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\Big)u_o^{r_n - r_\nu}\Big) + u_o^{r_n - r_m}\Big] - u_o^{r_n} = 0$$

(resp.

$$\mu T^{r}\Big[\Big(\sum_{\nu=n}^{m-1}\Big(\sum_{i\in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\Big)u_o^{r_n - r_\nu}\Big) + u_o^{r_n - r_m}\Big] - u_o^{r_n}\Big] = 0).$$

et les deux hensélisés en $\widetilde{0}$, $\mathcal{X}_{1(\widetilde{0})}$ et $\mathcal{X}_{2(\widetilde{0})}$, de $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ respectivement, sont isomorphes sur $\widetilde{\mathcal{V}}$: en effet, le $\widetilde{\mathcal{V}}$-automorphisme

$$\varphi : \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \widetilde{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \widetilde{\mathcal{V}}$$

défini par

$$\begin{cases} \varphi(u_o) = T^{-r'_m} u_o \\ \varphi(u_i) = T^{r'_\nu - r'_m} u_i \quad (i \in I'_\nu \ , \ \nu = n,\ldots,m-1) \end{cases}$$

où on a posé $r'_\nu = r/r_\nu$ $(\nu = n,\ldots,m)$, préserve le point $\widetilde{0}$ et induit un $\widetilde{\ }$-isomorphisme de $\mathcal{X}_1$ sur $\mathcal{X}_2$.

Dans la situation (ii), $\mathcal{X}_1$ (resp. $\mathcal{X}_2$) est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \widetilde{\mathcal{V}}$ d'équation

$$\mu\Big[\Big(\sum_{\nu=n}^{m-1}\Big(\sum_{i\in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\Big)u_o^{r_n - r_\nu}\Big) + u_o^{r_n - r_{m_\nu}}\Big] - u_o^{r_n} = 0$$

(resp.

$$\mu T^{r}\Big[\Big(\sum_{\nu=n}^{m-1}\Big(\sum_{i\in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\Big)u_o^{r_n - r_\nu}\Big) + u_o^{r_n - r_{m_\nu}}\Big] - u_o^{r_n} = 0)$$

et les deux hensélisés en $\tilde{0}$, $X_{1(\tilde{0})}$ et $X_{2(\tilde{0})}$, de X_1 et X_2 respectivement, sont isomorphes sur $\tilde{\mathcal{F}}$: en effet, le $\tilde{\mathcal{F}}$-automorphisme

$$\varphi : \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{} \longrightarrow \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathcal{F}}$$

défini par

$$\begin{cases} \varphi(u_o) = T^{-r'_m} u_o \\ \varphi(u_i) = T^{r'_\nu - r'_m} u_i \qquad (i \in I'_\nu, \nu = n, \ldots, m-1) \\ \varphi(v) = v \end{cases}$$

où on a posé $r'_\nu = r/r_\nu$ $(\nu = n, \ldots, m)$, préserve le point $\tilde{0}$ et induit un $\tilde{\mathcal{F}}$-isomorphisme de X_1 sur X_2 .

Par suite 9.3.5 est conséquence du lemme suivant (cf. [7] p. 184-187, pour une démonstration) :

LEMME 9.3.5.2. Soit k un corps séparablement clos, soit $S = \mathrm{Spec}(k[[\mu]])$ et soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé de type fini. Notons s le point fermé de S , η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique localisé en η et $I = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ le groupe d'inertie de S correspondant. Fixons un point fermé x de X_s . Soit r un entier positif, premier à la caractéristique p de k . Soit T une indéterminée et soit $K = k(T)$. Notons, pour $\alpha = 1,2$, X_α le $K[[\mu]]$-schéma déduit de X par l'extension de k-traits

$$\theta_\alpha : k[[\mu]] \longrightarrow K[[\mu]]$$

définie par

$$\theta_\alpha(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{si } \alpha = 1 \\ T^r \mu & \text{si } \alpha = 2 \end{cases} .$$

Notons x_α l'unique point rationnel sur K de $X_i \otimes_{K[[\mu]]} K$ qui est au-dessus du point x de X_s . On suppose que les hensélisés, $X_{1(x_1)}$ et $X_{2(x_2)}$, de X_1 et X_2 respectivement sont $K[[\mu]]$-isomorphes. Alors l'action de I sur la cohomologie λ-adique $(\lambda \mid \ell \neq p)$

$$H^*(X_{(x)\bar{\eta}}, E_\lambda)$$

de la fibre en $\bar{\eta}$ de l'hensélisé $X_{(x)}$ de X en x se factorise à travers l'unique quotient fini cyclique d'ordre r de I .

10. Calcul de $\chi(V,E_\lambda)$ et de $\chi(V_{\bar\eta},E_\lambda)$. Fin de la démonstration de 4.2.

PROPOSITION 10.1. Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$ et soit $(d_i)_{i\in I}$ une famille finie d'entiers positifs, premiers à p. L'hypersurface diagonale affine

$$V \subset \mathbb{A}_F^I = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i\in I}]) ,$$

d'équation $\overline{\sum_{i\in I}} y_i^{d_i} + 1 = 0$, admet comme caractéristique d'Euler-Poincaré λ-adique

$$\chi(V,E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(I)-1} \prod_{i\in I} (d_i - 1)$$

pour tout $\lambda | \ell \neq p$.

10.1.1. Prouvons 10.1. Considérons V comme revêtement fini de l'hyperplan

$$H \subset \mathbb{A}_F^I = \mathrm{Spec}(F[(z_i)_{i\in I}]) ,$$

d'équation $\overline{\sum_{i\in I}} z_i + 1 = 0$, via le morphisme

$$\varphi : V \longrightarrow H$$

défini par $\varphi((y_i)_{i\in I}) = (y_i^{d_i})_{i\in I}$. Pour chaque partie non vide J de I, soit H^J l'ouvert de H défini par les conditions $z_j \neq 0$ $(\forall j \in J)$ et soit H_J le fermé de H d'équations $z_i = 0$ $(\forall i \in I-J)$. Alors H est réunion disjointe des $H_J \cap H^J$, pour J parcourant les parties non vides de I, et φ est fini étale, de degré $\prod_{j\in J} d_j$, au-dessus de $H_J \cap H^J$. Comme, pour toute partie non vide J de I, le degré $\prod_{j\in J} d_j$ est premier à p, on a ([6] 2.8 ou [7] 5.5.2)

$$\chi_c(\varphi^{-1}(H_J \cap H^J), E_\lambda) = (\prod_{j\in J} d_j)\chi_c(H_J \cap H^J) .$$

De plus

$$\chi_c(H_J \cap H^J) = (-1)^{\mathrm{card}(J)-1}$$

pour toute partie non vide J de I : en effet, pour toute partie K non vide de I, on a

$$H_K = \bigcup_{\emptyset \subsetneq J \subset K} H_J \cap H^J$$

et

$$\chi_c(H_K, E_\lambda) = 1 .$$

Par suite

$$\chi_c(V, E_\lambda) = \sum_{\emptyset \subsetneq J \subset I} (-1)^{\mathrm{card}(J)-1} \prod_{j \in J} d_j$$

d'où la conclusion puisque $\chi(V, E_\lambda) = \chi_c(V, E_\lambda)$ (dualité de Poincaré).

PROPOSITION 10.2. *Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$, soient $(d_i)_{i \in I}$ une famille finie non vide d'entiers positifs, premiers à p, et $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de F non tous nuls. Soient $1 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_N$ les valeurs distinctes prises par les d_i $(i \in I)$, $I_\nu = \{i \in I \mid d_i = d_\nu\}$ et $I'_\nu = \{i \in I_\nu \mid a_i \neq 0\}$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. Soit $n \in \{1, \ldots, N\}$ le plus petit indice ν tel que $I'_\nu \neq \emptyset$. On fait l'hypothèse suivante :*

(B_3) le cône et l'hyperplan de $\mathbb{A}_F^{I'_n} = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i \in I'_n}])$, respectivement d'équations

$$\sum_{i \in I'_n} y_i^{d_n} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I'_n} a_i y_i = 0 ,$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Alors, si

$$V \subset \mathbb{A}_F^I = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i \in I}])$$

désigne l'hypersurface diagonale affine d'équation $\sum_{i \in I} y_i^{d_i} + 1 = 0$, s

$$g : V \longrightarrow \mathbb{A}_F^1$$

est le morphisme défini par $g((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i$ et si $V_{\bar\eta}$ est la fibre de g en un point géométrique générique $\bar\eta$ de $\mathbb{A}^1_F$, on a

$$\chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(I)} \frac{\prod_{i\in I} (d_i - 1)}{d_n - 1}$$

pour tout $\lambda | \ell \neq p$.

La démonstration de 10.2 comporte plusieurs étapes ; la première consiste à nous ramener à démontrer 10.2 avec l'hypothèse supplémentaire $n = 1$, i.e. $I'_1 \neq \emptyset$. Plus précisément, on a :

LEMME 10.3. Les notations et les hypothèses étant celles de 10.2, soient

$$I' = \bigcup_{\nu=n}^{N} I_\nu \quad \text{et} \quad I'' = I - I' = \bigcup_{\nu=1}^{n-1} I_\nu ,$$

soit

$$\tilde V \subset \mathbb{A}_F^{I'} = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i\in I'}])$$

l'hypersurface diagonale affine d'équation $\sum_{i\in I'} y_i^{d_i} + 1 = 0$ et soit

$$\tilde g : \tilde V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$$

le morphisme défini par $\tilde g((y_i)_{i\in I'}) = \sum_{i\in I'} a_i y_i$. Alors

$$\chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda) - 1 = \prod_{i\in I''} (1 - d_i))(\chi(\tilde V_{\bar\eta}, E_\lambda) - 1)$$

pour tout $\lambda | \ell \neq p$, $\tilde V_{\bar\eta}$ désignant la fibre de $\tilde g$ en un point géométrique générique $\bar\eta$.

10.3.1. Pour prouver 10.3, on considère le diagramme commutatif, à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} & & V & \xrightarrow{p} & \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i\in I''}]) \\ & g \swarrow & \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{A}^1_F & & & & \\ & g' \nwarrow & V' & \xrightarrow{p'} & \mathbb{A} = \mathrm{Spec}(F[t]) \end{array}$$

où

$$V' \subset \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i\in I'}, y_o])$$

est défini par l'équation $\sum_{i\in I'} y_i^{d_i} + y_o + 1 = 0$, où

$g'((y_i)_{i\in I'}, y_o) = \sum_{i\in I'} a_i y_i$, $h((y_i)_{i\in I}) = ((y_i)_{i\in I'}, \sum_{i\in I''} y_i^{d_i})$,

$k((y_i)_{i\in I''}) = \sum_{i\in I''} y_i^{d_i}$, $p((y_i)_{i\in I}) = (y_i)_{i\in I''}$ et $p'((y_i)_{i\in I'}, y_o) = y_o$.

De la suite spectrale de Leray pour le morphisme $h_{\bar\eta} : V_{\bar\eta} \longrightarrow V'_{\bar\eta}$ (fibre de h en $\bar\eta$) et pour le E_λ-faisceau constant E_λ , on tire la relation

$$\chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda) = \sum_j (-1)^j \chi(V'_{\bar\eta}, R^j h_* E_\lambda) \quad . \tag{10.3.1.1}$$

La flèche de changement de base

$$p'^* R^j k_* E_\lambda \longrightarrow R^j h_* E_\lambda$$

est un isomorphisme pour tout $j \geqslant 0$ (cf. 8.2.4, en faisant toutefois attention au fait que I' et I'' n'ont pas tout à fait la même signification) et si

$$s : \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(F[(t_i)_{i\in I''}]) \longrightarrow \mathbb{A}$$

est le morphisme somme, $s((t_i)_{i\in I''}) = \sum_{i\in I''} t_i$, si

$$G = \prod_{i\in I''} \mu_{d_i}(F) \quad ,$$

si, pour chaque caractère $\underline{\chi} : G \longrightarrow E_\lambda^*$ de support $K'' \subset I''$,

$$\nu_{\underline{\chi}} = \nu_K : \mathbb{G}_m^{K''} \times \mathbb{A}^{I''-K''} \hookrightarrow \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(F[(t_i)_{i\in I''}])$$

est l'inclusion naturelle et $\mathcal{K}(\underline{\chi})$ est le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{G}_m^{K''} \times \mathbb{A}^{I''-K''}$ défini par

$$\mathcal{K}(\underline{\chi}) = \Big(\boxtimes_{k\in K''} \mathcal{K}_{d_k}(\chi_k, t_k)\Big) \otimes E_\lambda \quad ,$$

on a, pour tout $j \geqslant 0$

$$R^j k_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi}\in \hat G} R^j s_* \nu_{\underline{\chi}!} \mathcal{K}(\underline{\chi})$$

(cf. 8.2.9 en faisant toujours attention au fait que I' et I'' ont dans 8.2.9 un sens légèrement différent). On a donc

$$(10.3.1.2)\quad \chi(V'_{\bar\eta}, R^j h_* E_\lambda) = \sum_{\underline{\chi}\in\hat{G}} \chi(V'_{\bar\eta}, p'^* R^j s_* \nu_{\underline{\chi}!} \mathcal{K}(\underline{\chi}))$$

pour tout $j \geqslant 0$.

Or, on sait calculer les $R^j s_* \nu_{\underline{\chi}!} \mathcal{K}(\underline{\chi})$ (cf. 8.3.3), par suite on a, compte-tenu de (10.3.1.2) :

$$(10.3.1.3)\quad \chi(V'_{\bar\eta}, R^0 h_* E_\lambda) = \chi(V'_{\bar\eta}, E_\lambda) ,$$

si $j \neq 0$, $\mathrm{card}(I'')-1$, on a

$$(10.3.1.4)\quad \chi(V'_{\bar\eta}, R^j h_* E_\lambda) = 0$$

et si $j = \mathrm{card}(I'')-1$, si

$$\nu_{\{o\}} : V'^{\{o\}} \hookrightarrow V'$$

est l'ouvert de V' défini par la condition $y_o \neq 0$, si d est le p.p.c.m. des $(d_i)_{i\in I''}$ et si $\prod_{i\in I''} \chi_i : \mu_d(F) \longrightarrow E_\lambda^*$ est le caractère défini en (8.3.1), on a

$$(1.3.1.5)\quad \chi(V'_{\bar\eta}, R^j h_* E_\lambda) = \sum_{\substack{\underline{\chi}\in\hat{G} \\ \mathrm{Supp}(\underline{\chi})=I''}} \chi(V'_{\bar\eta}, (\nu_{\{o\}})_! \mathcal{K}_d(\prod_{i\in I''} \chi_i, p'))$$

(rappelons simplement que le E_λ-vectoriel $H(\underline{\chi})$ défini en (8.3.3.2 est de dimension 1).

Comme $g' : V' \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} V' & & \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \searrow^{g'} & \\ \mathbb{A}^{I'} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{A}^1_F \end{array}$$

où $\alpha((y_i)_{i\in I'}, y_o) = (y_i)_{i\in I'}$ et $\beta((y_i)_{i\in I'}) = \sum_{i\in I'} a_i y_i$, et que α est un isomorphisme, on a

$$(10.3.1.6)\quad \chi(V'_{\bar\eta}, E_\lambda) = \chi_c(V'_{\bar\eta}, E_\lambda) = 1 .$$

D'autre part, d'après [9], on a

$$\chi(V'_{\bar\eta},(v_{\{o\}})_!\mathcal{K}_d(\prod_{i\in I"}\chi_i,p')) = \chi_c(V'_{\bar\eta},(v_{\{o\}})_!\mathcal{K}_d(\prod_{i\in I"}\chi_i,p')$$
$$= \chi_c(V'^{\{o\}}_{\bar\eta},\mathcal{K}_d(\prod_{i\in I"}\chi_i,p'))$$

donc d'après [6] 2.7 ou [7] 5.5.2, on a

$$\chi(V'_{\bar\eta},(v_{\{o\}})_!\mathcal{K}_d(\prod_{i\in I"}\chi_i,p')) = \chi_c(V'^{\{o\}}_{\bar\eta},E_\lambda) ;$$

or $\widetilde{V}$ s'identifie au fermé de V' d'équation $y_o = 0$, i.e. à $V' - V'^{\{o\}}$, donc

$$\chi_c(V'^{\{o\}}_{\bar\eta},E_\lambda) = \chi_c(V'_{\bar\eta},E_\lambda) - \chi_c(\widetilde{V}_{\bar\eta},E_\lambda) = 1 - \chi_c(\widetilde{V}_{\bar\eta},E_\lambda) ,$$

et, comme $\chi_c(\widetilde{V}_{\bar\eta},E_\lambda) = \chi(\widetilde{V}_{\bar\eta},E_\lambda)$ (cf. [9]), on a

(10.3.1.7) $$\chi(V'_{\bar\eta},(v_{\{o\}})_!\mathcal{K}_d(\prod_{i\in I"}\chi_i,p')) = 1 - \chi(\widetilde{V}_{\bar\eta},E_\lambda) .$$

Comme il y a $\prod_{i\in I"}(d_i-1)$ caractères $\underline{\chi}$ de G de support $I"$, on a, en regroupant les formules (1.3.1.1) à (1.3.1.7), montré 10.3.

10.4. Il nous reste à montrer 10.2 avec l'hypothèse supplémentaire

(10.4.1) $$I'_1 \neq \emptyset .$$

Le principe de la démonstration est le suivant : fixons un indice $i_1 \in I_1$, les conditions $a_{i_1} \neq 0$ (i.e. $i_1 \in I'_1$) et (B_3) déterminent un ouvert de Zariski de $\mathrm{Spec}(F[(a_i)_{i\in I}])$; à chaque point fermé $(a_i)_{i\in I}$ de cet ouvert de Zariski, est attaché un morphisme $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$ défini par $g((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i$, donc le $\bar\eta$-schéma $V_{\bar\eta}$, fibre de g en $\bar\eta$; par suite

$$(a_i)_{i\in I} \longmapsto \chi(V_{\bar\eta},E_\lambda)$$

est une fonction sur cet ouvert de Zariski. On va montrer que cette fonction est constante et calculer sa valeur en un point particulier de cet ouvert.

Partons donc d'une famille $(d_i)_{i\in I}$ finie non vide d'entiers positifs, premier à p, de valeurs distinctes $1 < d_1 < d_2 < \ldots < d_N$, posons $I_\nu = \{i \in I \mid d_i = d_\nu\}$ $(\nu = 1,\ldots,N)$ et fixons un indice $i_1 \in I_1$; on posera alors

$$\widetilde{I}_\nu = \begin{cases} I_1 - \{i_1\} & \text{si } \nu = 1 \\ I_\nu & \text{si } \nu = 2,\ldots,N \end{cases}$$

et

$$\widetilde{I} = \bigcup_{\nu=1}^{N} \widetilde{I}_\nu = I - \{i_1\} .$$

Associons à ces données le morphisme

$$f : X \longrightarrow S = \mathrm{Spec}(F[s_o,(s_i)_{i\in\widetilde{I}}]) \tag{10.4.2}$$

définit comme suit : X est l'hypersurface dans $\mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i\in\widetilde{I}}]) \times S$ d'équation

$$\sum_{i\in\widetilde{I}} y_i^{d_i} + (s_o + \sum_{i\in\widetilde{I}} s_i y_i)^{d_{i_1}} + 1 = 0 ,$$

équation que l'on peut aussi écrire

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\sum_{i\in\widetilde{I}_\nu} y_i^{d_\nu}) + (s_o + \sum_{\nu=1}^{N} (\sum_{i\in\widetilde{I}_\nu} s_i y_i))^{d_1} + 1 = 0 ,$$

et f est la restriction à X de la projection sur S .

On a alors un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V\times\mathbb{A}^{\circ} & \xrightarrow{s'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{A}^1_F\times\mathbb{A}^{\circ} & \xrightarrow{s} & S \end{array} \tag{10.4.3}$$

où $\mathbb{A}^{\circ}$ est l'ouvert de $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}(F[(a_i)_{i\in I}])$ défini par la condition $a_{i_1} \neq 0$ et où

$$\begin{cases} s(t,(a_i)_{i\in I}) = (t/a_{i_1},(-a_i/a_{i_1})_{i\in\tilde{I}}) , \\ f'((y_i)_{i\in I},(a_i)_{i\in I}) = (\sum_{i\in I} a_i y_i,(a_i)_{i\in I}) \\ s'((y_i)_{i\in I},(a_i)_{i\in I}) = ((y_i)_{i\in\tilde{I}},s(\sum_{i\in I} a_i y_i,(a_i)_{i\in I})) . \end{cases}$$

Par suite, <u>la fibre du morphisme</u> $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$ <u>défini par</u> $\sum_{i\in I} a_i y_i = 0$, <u>pour une famille</u> $(a_i)_{i\in I}$ <u>d'éléments de</u> F <u>telle que</u> $a_{i_1} \neq 0$, <u>au point fermé</u> t <u>de</u> $\mathbb{A}^1_F$, <u>s'identifie à la fibre du morphisme</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>au point fermé</u> $s(t,(a_i)_{i\in I})$ <u>de</u> S . Si, de plus, $(a_i)_{i\in I}$ vérifie l'hypothèse (B_3) de 10.2, pour tout point fermé t de $\mathbb{A}^1_F$, on a $s(t,(a_i)_{i\in I})$, où

(10.4.4) $$S^\circ \subset S$$

est l'ouvert de Zariski de $S = \mathrm{Spec}(F[s_o,(s_i)_{i\in\tilde{I}}])$ déterminé par la condition :

(B_4) <u>Le cône dans</u> $\mathbb{A}_F^{I_1}$ <u>d'équation</u>

$$\sum_{i\in\tilde{I}_1} y_i^{d_1} + (\sum_{i\in\tilde{I}_1} s_i y_i)^{d_1} = 0$$

<u>est lisse en dehors de l'origine</u>.

Notons

(10.4.5) $$S^{\circ\circ} \subset S^\circ \subset S$$

l'intersection de S° et des ouverts maximaux de lissité des E_λ-faisceaux $R^j f_! E_\lambda$ $(j \in \mathbb{N})$.

PROPOSITION 10.5. <u>Pour toute famille</u> $(a_i)_{i\in I}$ <u>d'éléments de</u> F <u>vérifiant l'hypothèse</u> (B_3) <u>de</u> 10.2 <u>et telle que</u> $a_{i_1} \neq 0$, <u>il existe au moins un point fermé</u> $t \in \mathbb{A}^1_F$ <u>tel que</u> $s(t,(a_i)_{i\in I}) \in S^{\circ\circ}$.

COROLLAIRE 10.5.1. <u>Quand</u> $(a_i)_{i\in I}$ <u>parcourt les familles d'éléments de</u> F , <u>d'ensemble d'indices</u> I , <u>vérifiant l'hypothèse</u> (B_3) <u>de</u> 10.2 <u>et telles que</u> $a_{i_1} \neq 0$, <u>la caractéristique d'Euler-Poincaré</u>

λ-adique, $\chi(V_{\bar\eta},E_\lambda)$, de la fibre en $\bar\eta$ du morphisme $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$, défini par $g((Y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i Y_i$, reste constante.

10.5.2. Déduisons 10.5.1 de 10.5. Par définition de S^{oo}, $\chi_c(X_s,E_\lambda)$ ne dépend pas de s choisi dans S^{oo}, donc $\chi_c(f'^{-1}(t,(a_i)_{i\in I}),E_\lambda)$ ne dépend pas de $(t,(a_i)_{i\in I})$ choisi dans $s^{-1}(S^{oo})$. Comme $s^{-1}(S^{oo})$ est un ouvert de $\mathbb{A}^1_F\times\mathbb{A}^\circ$ et rencontre $\mathbb{A}^1_F\times\{(a_i)_{i\in I}\}$ dès que $(a_i)_{i\in I}$ vérifie (B_3) de 10.2, le point géométrique $(\bar\eta,(a_i)_{i\in I})$ de $\mathbb{A}^1_F\times\mathbb{A}^\circ$ est dans $s^{-1}(S^{oo})$ dès que $(a_i)_{i\in I}$ vérifie (B_3) de 10.2, d'où la conclusion, puisque $\chi_c(V_{\bar\eta},E_\lambda) = \chi(V_{\bar\eta},E_\lambda)$ (cf. [9]).

10.6. Prouvons 10.5. Le morphisme $f : X \longrightarrow S$ admet une compactification naturelle :

(10.6.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \bar X \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \bar f} & \\ & S & \end{array}$$

(j est une immersion ouverte d'image dense, $\bar f$ est un morphisme propre) définie comme suit : $\bar X$ est l'hypersurface dans $\mathrm{Proj}(F[Y_o,(Y_i)_{i\in\tilde I}])\times S$ d'équation

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Big(\sum_{i\in\tilde I_\nu} Y_i^{d_\nu}\Big) Y_o^{d_N-d_\nu} + \Big(s_oY_o + \sum_{i\in\tilde I} s_iY_i\Big)^{d_1} Y_o^{d_N-d_1} + Y_o^{d_N} = 0 ,$$

$\bar f$ est la restriction à $\bar X$ de la projection sur S et j identifie de manière évidente X à l'ouvert de $\bar X$ déterminé par la condition $Y_o \neq 0$.

L'infini de X, i.e. le fermé $\bar X - X$ de $\bar X$, est, pour $N > 1$, le fermé de $\mathrm{Proj}(F[Y_o,(Y_i)_{i\in\tilde I}])\times S$ d'équations

$$\sum_{i\in\tilde I_N} Y_i^{d_N} = Y_o = 0 ,$$

donc est le produit d'un fermé de $\mathrm{Proj}(F[Y_o,(Y_i)_{i\in\tilde{I}}])$ par S ; pour $N=1$, on a $\tilde{I}=\tilde{I}_1$ et $\bar{X}$-X est le fermé de $\mathrm{Proj}(F[Y_o,(Y_i)_{i\in\tilde{I}_1}])\times S$ d'équations

$$\sum_{i\in\tilde{I}_1} Y_i^{d_1} + \Big(\sum_{i\in\tilde{I}_1} s_i Y_i\Big)^{d_1} = Y_o = 0 ,$$

donc est lisse au-dessus de S°, compte-tenu de (B_4).

Considérons alors la suite exacte longue d'excision pour l'immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \bar{X}$:

$$\dashrightarrow R^j f_! E_\lambda \longrightarrow R^j \bar{f}_* E_\lambda \longrightarrow R^j(\bar{f}|\bar{X}\text{-}X)_* E_\lambda \longrightarrow R^{j+1} f_! E_\lambda \longrightarrow \dashrightarrow .$$

Vu la description que l'on vient de donner de $\bar{X}$-X, les E_λ-faisceaux $R^j(\bar{f}|\bar{X}\text{-}X)_* E_\lambda$ $(j\in\mathbb{N})$ sont lisses au-dessus de l'ouvert S° de S, donc

(10.6.2) $S^{\circ\circ}$ <u>est l'intersection de</u> S° <u>et des ouverts maximaux de lissité des</u> E_λ-<u>faisceaux</u> $R^j\bar{f}_* E_\lambda$ $(j\in\mathbb{N})$.

LEMME 10.6.3. <u>Soient</u> $(d_i)_{i\in I}$ <u>et</u> $(a_i)_{i\in I}$ <u>comme en</u> 10.2. <u>On suppose</u> $I_1' \neq \emptyset$ <u>et que l'hypothèse</u> (B_3) <u>de</u> 10.2 (<u>pour</u> $n=1$) <u>est vérifiée. Alors l'ouvert de</u> $\mathbb{A}^1_F$ <u>au-dessus duquel le morphisme</u> $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$, <u>défini par</u> $g((Y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i Y_i$, <u>est lisse, est non vide (autrement dit,</u> $V_{\bar{\eta}}$ <u>est lisse</u>).

10.6.3.1. Prouvons 10.6.3. Soit $\mathfrak{J}\subset F[(Y_i)_{i\in I}]$ l'idéal jacobien de $\Big(\sum_{i\in I} Y_i^{d_i}, \sum_{i\in I} a_i Y_i\Big)$, engendré par les polynômes

$$a_i d_j Y_j^{d_j-1} - a_j d_i Y_i^{d_i-1} \qquad (i,j\in I, i\neq j) ,$$

et soit Γ le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^I_F$ défini par l'idéal $\mathfrak{J}$. Le lien singulier de la fibre en t, V_t, de $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$ est alors $V_t \cap \Gamma$, donc, pour montrer 10.6.3, il suffit de prouver que $\Gamma \cap V$ est fini (sur F).

Fixons $i_1 \in I_1' = \{i \in I \mid d_i = d_1 \text{ et } a_i \neq 0\}$, alors $\mathcal{J}$ est déjà engendré par les polynômes

$$a_{i_1} d_j y_j^{d_j-1} - a_j d_1 y_{i_1}^{d_1-1} \qquad (j \in I-\{i_1\}) .$$

Laissons provisoirement de côté le cas $d_1 = 1$ et supposons donc $d_1 \geqslant 2$. Alors Γ est une courbe intersection complète dans $\mathbb{A}_F^I$ (c'est la "courbe polaire" de $g : V \longrightarrow \mathbb{A}_F^1$). Pour tout $i \in I$, soit C_i l'ensemble des racines (d_i-1)-ièmes de $a_i d_1 / a_{i_1} d_i$ dans F ($C_{i_1} = \{1\}$), soit

$$C = \prod_{i \in I} C_i$$

et soit

$$\pi : \coprod_{\underline{c} \in C} \mathrm{Spec}(F[u_{\underline{c}}]) \longrightarrow \Gamma$$

le morphisme défini par $y_i = c_i . u_{\underline{c}}^{\delta/(d_i-1)}$ $(i \in I)$, pour tout $\underline{c} = (c_i)_{i \in I} \in C$, où l'on a posé

$$\delta = (d_1-1)....(d_N-1) .$$

Comme le morphisme π est surjectif, pour montrer que $V \cap \Gamma$ est fini (sur F), il suffit de montrer que $\pi^{-1}(V \cap \Gamma)$ l'est. Or $\mathrm{Spec}(F[u_{\underline{c}}]) \cap \pi^{-1}(V \cap \Gamma)$ a pour équation

$$\sum_{i \in I} c_i^{d_i} u_{\underline{c}}^{\delta d_i/(d_i-1)} + 1 = 0$$

et le coefficient dominant de ce polynôme de degré $\delta d_1/(d_1-1) > 0$ en $u_{\underline{c}}$ est

$$\sum_{i \in I_1} c_i^{d_1} = \sum_{i \in I_1'} c_i^{d_1} ;$$

si ce coefficient dominant était nul, le système d'équations

$$\begin{cases} \sum_{i \in I_1'} c_i^{d_1-1} x_i = 0 \\ \sum_{i \in I_1'} a_i x_i = 0 \end{cases}$$

aurait la solution commune non triviale $(x_i)_{i\in I} = (c_i)_{i\in I}$, ce qui contredirait (B_3) de 10.2 (pour $n=1$) ; par suite, ce coefficient dominant est non nul et $\mathrm{Spec}(F[u_{\underline{c}}]) \cap \pi^{-1}(V \cap \Gamma)$ est fini. Ceci ayant lieu quelque soit $\underline{c} \in C$, 10.6.3 est démontré pour $d_1 \geqslant 2$.

Pour $d_1 = 1$, Γ est vide sauf si $I_1 = I_1' = \{i_1\}$: en effet, pour que Γ soit non vide, il faut que $a_i = a_{i_1}$ pour tout $i \in I_1$, i.e. que

$$\sum_{i\in I_1'} a_i y_i = a_{i_1} \Big(\sum_{i\in I_1} y_i\Big)$$

mais, vu l'hypothèse (B_3) de 10.2, nécessairement $I_1 = I_1'$ est réduit à $\{i_1\}$. Supposons donc $d_1 = 1$ et $I_1 = I_1' = \{i_1\}$, alors $\Gamma \cap V$ est défini par les équations

$$\begin{cases} y_i^{d_i - 1} = a_i / a_{i_1} d_i & (i \in I - \{i_1\}) \\ y_{i_1} = -1 - \sum_{i\in I-\{i_1\}} y_i^{d_i} \end{cases}$$

où $d_i \geqslant 1$, pour $i \in I-\{i_1\}$, donc $\Gamma \cap V$ est fini et 10.6.3 est démontré pour $d_1 = 1$.

LEMME 10.6.4. *Le morphisme* $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow S$ *est localement acyclique en tout point fermé de* $\bar{X}-X$ *au-dessus de* S° , *relativement au faisceau constant* E_λ .

10.6.4.1. Prouvons 10.6.4. Nous noterons simplement P l'espace projectif $\mathrm{Proj}(F[Y_o, (Y_i)_{i\in \tilde{I}}])$. Soit x un point fermé de $\bar{X}-X$ au-dessus de S° , alors Y_o s'annule en x et il existe un unique $m \in \{1,\dots,N\}$ tel que

(i) Y_i s'annule en x , pour $i \in \tilde{I}_\nu$, $\nu = N,\dots,m+1$;

(ii) pour un indice $i \in \tilde{I}_m$ au moins, Y_i ne s'annule pas en x .

Supposons qu'il existe un diagramme commutatif de morphismes de F-schémas pointés

$$\begin{array}{ccccc} & & (\bar{X}',x') & & \\ & \swarrow^{\pi} & & \searrow^{(u,s)} & \\ (10.6.4.2) \qquad (\bar{X},x) & & & & (Y\times S^{\circ},(y,s)) \\ & \searrow_{\bar{f}} & & \swarrow_{pr_2} & \\ & & (S^{\circ},s) & & \end{array}$$

avec π étale en x' et (u,s) lisse en x', alors 10.6.4 résulte de [5] 2.7 et SGA 4½ [Th. Finitude] 2.16.

Nous allons construire un diagramme commutatif de morphismes de F-schémas pointés

$$\begin{array}{ccccc} & & (Q,x') & & \\ & \swarrow^{\pi} & & \searrow^{(u,s)} & \\ (10.6.4.3) \qquad (P\times S^{\circ},x) & & & & (A\times S^{\circ},(y,s)) \\ & \searrow_{pr_2} & & \swarrow_{pr_2} & \\ & & (S^{\circ},s) & & \end{array}$$

avec π étale en x' et (u,s) lisse, tel qu'il existe un sous-schéma fermé $Y\subset A$ vérifiant

$$(u,s)^{-1}(Y\times S^{\circ}) = \pi^{-1}(\bar{X}) \quad ; \tag{10.6.4.4}$$

cela entraînera la conclusion car on déduit de (10.6.4.3), par restriction à $\bar{X}$, un diagramme (10.6.4.2).

Pour construire (10.6.4.3) et donc prouver 10.6.4, nous distinguerons quatre cas :

(a) $m>1$ et $\sum_{i\in\tilde{I}_m} Y_i^{d_m}$ ne s'annule pas en x : alors choisissons $i_m\in\tilde{I}_m$ tel que Y_{i_m} ne s'annule pas en x ; la fonction rationnelle sur $P\times S^{\circ}$

$$\eta = \frac{(\sum_{\nu=1}^{m}(\sum_{i\in\tilde{I}_\nu} Y_i^{d_\nu})Y_o^{d_m-d_\nu}) + (s_oY_o+\sum_{i\in\tilde{I}} s_iY_i)^{d_1}Y_o^{d_m-d_1}+Y_o^{d_m}}{Y_{i_m}^{d_m}}$$

est définie en x et ne s'annule pas en x ; comme par hypothèse $(d_m,p) = 1$, le revêtement de Kummer

$$\pi : (Q,x') \longrightarrow (P\times S^\circ,x)$$

d'équation $\zeta^{d_m} = \eta$ est étale en x' (le choix de x' correspond au choix d'une racine d_m-ième de $\eta(x)$). Considérons l'espace affine A sur F de dimension $1+\sum_{\nu=m+1}^{N} \mathrm{card}(\tilde{I}_\nu)$, d'origine y , et soit

$$(\underline{u},\underline{s}) : (Q,x') \longrightarrow (A\times S^\circ,(y,s))$$

le morphisme de composantes u_o , u_i $(i\in\tilde{I}_\nu$, $\nu = m+1,\dots,N)$, s_o et s_i $(i\in\tilde{I})$, où on a posé

$$u_o = Y_o/\zeta Y_{i_m}$$

et

$$u_i = Y_i/\zeta Y_{i_m} \qquad (i\in\tilde{I}_\nu \ , \ \nu = m+1,\dots,N) \ .$$

Ce morphisme $(\underline{u},\underline{s})$ est lisse en x' et si $Y\subset A$ est le sous-schéma fermé d'équation

$$(\sum_{\nu=m+1}^{N} (\sum_{i\in\tilde{I}_\nu} u_i^{d_\nu}) u_o^{d_N-d_\nu}) + u_o^{d_N-d_m} = 0$$

on a (10.6.4.4), d'où la conclusion dans ce cas.

(b) $m > 1$ <u>et</u> $\sum_{i\in\tilde{I}_m} Y_i^{d_m}$ <u>s'annule en</u> x : alors choisissons $i_m\in\tilde{I}_m$ tel que Y_{i_m} ne s'annule pas en x ; prenons $(Q,x') = (P\times S^\circ,x)$ et π le morphisme identique. Considérons l'espace affine A sur F de dimension $2+\sum_{\nu=m+1}^{N} \mathrm{card}(\tilde{I}_\nu)$, d'origine y , et soit

$$(\underline{u},\underline{s}) : (Q,x') = (P\times S^\circ,x) \longrightarrow (A\times S^\circ,(y,s))$$

le morphisme de composantes u_o , u_i $(i\in\tilde{I}_\nu$, $\nu = m+1,\dots,N)$, v , s_o et s_i $(i\in\tilde{I})$, où on a posé

$$u_o = Y_o/Y_{i_m} ,$$

$$u_i = Y_i/Y_{i_m} \qquad (i \in \tilde{I}_\nu \ , \ \nu = m+1,\dots,N)$$

et

$$v = \frac{(\sum_{\nu=1}^{m} (\sum_{i\in\tilde{I}_\nu} Y_i^{d_\nu}) Y_o^{d_m-d_\nu}) + (s_o Y_o + \sum_{i\in\tilde{I}} s_i Y_i)^{d_1} Y_o^{d_m-d_1} + Y_o^{d_m}}{Y_{i_m}^{d_m}} .$$

Ce morphisme $(\underline{u},\underline{s})$ est lisse en $x' = x$ (en effet, $(d_m,p) = 1$ par hypothèse, donc l'hypersurface dans $\mathbb{A}_F^{\tilde{I}_m} = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i\in\tilde{I}_m}])$, d'équation $\sum_{i\in\tilde{I}_m} y_i^{d_m} = 0$, est lisse en dehors de l'origine) ; de plus, si $Y \subset A$ est le sous-schéma fermé d'équation

$$\sum_{\nu=m+1}^{N} (\sum_{i\in\tilde{I}_\nu} u_i^{d_\nu}) u_o^{d_N-d_\nu} + u_o^{d_N-d_m} . v = 0$$

on a (10.6.4.4), d'où la conclusion dans ce cas.

(c) $m = 1$ <u>et</u> $\sum_{i\in\tilde{I}_1} Y_i^{d_1} + (\sum_{i\in\tilde{I}_1} s_i Y_i)^{d_1}$ <u>ne s'annule pas en</u> x : l'étude de ce cas est analogue à celle du cas (a).

(d) $m = 1$ <u>et</u> $\sum_{i\in\tilde{I}_1} Y_i^{d_1} + (\sum_{i\in\tilde{I}_1} s_i Y_i)^{d_1}$ <u>s'annule en</u> x : l'étude de ce cas est analogue à celle du cas (b), avec une différence cependant : la lissité du morphisme $(\underline{u},\underline{s}) : (Q,x') \longrightarrow (A\times S^\circ,(y,s))$ est assurée maintenant par le fait que $s \in S^\circ$, i.e. que $(s_i)_{i\in\tilde{I}_1}$ vérifie (B_4) de 10.4.

10.6.5. Nous pouvons achever la démonstration de 10.5. D'après le théorème de spécialisation des groupes de cohomologie (SGA 4 XVI 2.1) et 10.6.4, $S^{\circ\circ}$ (compte-tenu de sa description (10.6.2)) contient l'ouvert de S° formé des $s \in S^\circ$ tels que X_s est lisse. Par suite 10.5 résulte du lemme 10.6.3 et de l'interprétation, donnée en 10.4, de la fibre de $f : X \longrightarrow S$ en un point $s(t,(a_i)_{i\in I})$.

10.7. Achevons la preuve de 10.2. Fixons un indice $i_1 \in I_1$ et soit $(a_i)_{i\in I}$ la famille d'éléments de F définie par

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_1 \\ 0 & \text{si } i \neq i_1 \end{cases} .$$

Calculons $\chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda)$ où $V_{\bar\eta}$ est la fibre en $\bar\eta$ du morphisme $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$ défini par $g((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i$. Si t est un point fermé de $\mathbb{A}^1_F$, la fibre V_t de g en t est clairement isomorphe à l'hypersurface de $\mathbb{A}^{\tilde I}_F = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i\in\tilde I}])$, $\tilde I = I - \{i_1\}$, d'équation

$$\sum_{i\in\tilde I} y_i^{d_i} + 1 + t^{d_1} = 0 ;$$

par suite, il résulte de 10.1 que, si $1+t^{d_1} \neq 0$, on a

$$\chi(V_t, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(\tilde I)-1} \prod_{i\in\tilde I} (d_i - 1)$$

donc

$$\chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(I)} \frac{\prod_{i\in I} (d_i - 1)}{d_1 - 1} .$$

Comme cette famille $(a_i)_{i\in I}$ vérifie $a_{i_1} \neq 0$ et l'hypothèse (B_3) de 10.2, il résulte de 10.5.1 que pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ vérifiant $I'_1 \neq \emptyset$ et l'hypothèse (B_3) de 10.2, on a

$$(10.7.1) \qquad \chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(I)} \frac{\prod_{i\in I} (d_i - 1)}{d_1 - 1}$$

où $V_{\bar\eta}$ est la fibre en $\bar\eta$ du morphisme $g : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_F$ associé à $(a_i)_{i\in I}$. Combinant (10.7.1) et 10.3, on obtient 10.2.

10.8. Preuve de 4.2. Soient V et $\mathcal{G}$ comme en 4.0, vérifiant les hypothèses (A) et (B) de 4.0. D'après 9.1, on a (cf. (9.0.3))

$$(10.8.1) \qquad \chi(V, \mathcal{G}) = \chi(V, E_\lambda) - \chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda) .$$

Le premier terme du second membre de 10.8.1 est calculé en 10.1, on y obtient

$$(10.8.2) \qquad \chi(V,E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(I)-1} \prod_{i\in I} (d_i-1) \ .$$

Pour le second terme, remarquons tout d'abord que l'hypothèse (B) de 4.0 implique l'hypothèse (B_3) de 10.2. Par suite, on peut utiliser 10.2 pour calculer ce second terme et on obtient

$$(10.8.3) \qquad \chi(V_{\bar{\eta}},E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(I)-1} \frac{\prod_{i\in I} (d_i-1)}{d_n-1}$$

où $n \in \{1,\ldots,N\}$ est le premier indice ν tel que $I'_\nu \neq \emptyset$.

En regroupant (10.8.1), (10.8.2) et (10.8.3), on obtient

$$\chi(V,\mathcal{G}) = (-1)^{\mathrm{card}(I)-1} \frac{\prod_{i\in I} (d_i-1)}{d_n-1} d_n$$

ce qui n'est autre que 4.2, au changement de notation $\nu_o = n$ près.

Bibliographie

[1] P. DELIGNE.- Cohomologie étale (SGA 4½). Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques. Springer Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag (1977) p. 168-232.

[2] P. DELIGNE.- Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . Séminaire I.H.E.S. (1980).

[3] P. DELIGNE.- Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) XIII. Le formalisme des cycles évanescents. Springer Lecture Notes in Math. 340, Springer Verlag (1973) p. 82-115.

[4] C. HOOLEY.- On the numbers that are representable as the sum of two cubes. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 314 (1980) p. 146-173.

[5] L. ILLUSIE.- Cohomologie étale (SGA 4½). Appendice à Théorème de finitude en cohomologie ℓ-adique. Springer Lecture Notes in Math 569, Springer-Verlag (1977) p. 252-261.

[6] L. ILLUSIE.- Formule d'Euler-Poincaré et Théorie de Brauer (d'après P. Deligne). Séminaire de l'ENS 1978-79. Astérisque n° 82-83 (1981) p. 161-172.

[7] N.M. KATZ.- Sommes exponentielles. Cours à Orsay, automne 1979. Astérisque n° 79 (1980).

[8] G. LAUMON.- Majoration de sommes exponentielles (d'après P. Deligne et N.M. Katz). Séminaire de l'ENS 1978-79. Astérisque n° 82-83 (1980), p. 221-258.

[9] G. LAUMON.- Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (19 janvier 1981), p. 209-212.

[10] J.-P. SERRE.- Représentations linéaires des groupes finis. Troisième édition corrigée, Hermann, Paris (1978).

[11] J.-P. SERRE.- Majoration de sommes exponentielles. Journées arithmétiques de Caen. Astérisque n° 41-42 (1977), p. 111-126.

[12] A. WEIL.- Number of solutions of equations in finite fields. Bull. Am. Math. Soc. 55 (1949), p. 497-508.

SUR LA CATÉGORIE DÉRIVÉE

DES Ω-MODULES FILTRÉS

SUR LA CATÉGORIE DÉRIVÉE DES $\mathcal{D}$-MODULES FILTRÉS

G. LAUMON (*)

0. INTRODUCTION.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif entre deux variétés quasi-projectives et lisses sur $\mathbb{C}$, soit d la dimension relative de f et soient

$$\begin{array}{ccccc} T^*X & \xleftarrow{F} & T^*Y \times_Y X & \longrightarrow & X \\ & & \bar{f}\downarrow & \square & \downarrow f \\ & & T^*Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

les morphismes canoniques induits par f au niveau des fibrés cotangents ; Kashiwara a défini un foncteur image directe $\int_f : D(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D(\mathcal{D}_Y)$ entre complexes de $\mathcal{D}$-Modules ($\mathcal{D}$ étant l'Anneau des opérateurs différentiels algébriques), il a montré que pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent, les faisceaux de cohomologie de $\int_f \mathcal{M}$ sont des $\mathcal{D}_Y$-Modules cohérents et que la variété caractéristique de chacun de ces faisceaux de cohomologie est contenue dans $\bar{f} \circ F^{-1}(|\mathrm{Car}\,\mathcal{M}|)$ où $|\mathrm{Car}\,\mathcal{M}| \subset T^*X$ est la variété caractéristique de $\mathcal{M}$; les démonstrations de Kashiwara sont analytiques, par voie microlocale.

Le but de cet exposé est de donner une démonstration purement algébrique des résultats ci-dessus et d'obtenir une formule permettant de calculer le cycle caractéristique de $\int_f \mathcal{M}$ en fonction de celui de $\mathcal{M}$. Dans le cas particulier où Y est réduit à un point et où $\mathcal{M}$ est holonome, nous retrouvons par voie algébrique la formule de Dubson-Kashiwara

$$\chi(X^{an}, DR(\mathcal{M}^{an})) = (T^*_X X . Z(\mathrm{Car}\,\mathcal{M}))$$

où $DR(\mathcal{M}^{an})$ est un complexe borné de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels sur X^{an} à cohomologie constructible (d'après Kashiwara) et où le second membre est le nombre d'intersection de la section nulle $T^*_X X$ de T^*X et du cycle caractéristique $Z(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$.

(*) Equipe de recherche associée au CNRS n° 653.

En fait nous introduisons une catégorie dérivée $DF(\mathcal{D}_X)$ dont les objets sont des complexes de $\mathcal{D}_X$-Modules filtrés et un foncteur

$$\int_f : DF(\mathcal{D}_X) \longrightarrow DF(\mathcal{D}_Y)$$

qui induit le foncteur $\int_f : D(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D(\mathcal{D}_Y)$ de Kashiwara par oubli des filtrations et qui induit le foncteur

$$R\bar{f}_* \circ F^!(-)[d] : D(\mathcal{O}_{T^*X}) \longrightarrow D(\mathcal{O}_{T^*Y})$$

par passage au gradué (vu comme Module sur le cotangent ; la définition de $\int_f : DF(\mathcal{D}_X) \longrightarrow DF(\mathcal{D}_X)$ est esquissée par Brylinski dans [4] 2.1). D'autre part nous définissons la notion de complexe filtré parfait de $\mathcal{D}_X$-Modules un tel complexe induisant un complexe de $\mathcal{D}_X$-Module borné à cohomologie cohérente par oubli de la filtration et un complexe de $\mathcal{O}_{T^*X}$-Modules borné à cohomologie cohérente par passage au gradué ; nous montrons que $\int_f$ transforme complexes filtrés parfaits en complexes filtrés parfaits.

On s'inspire bien entendu très largement des exposés d'Illusie I, II, III et IV dans SGA 6 [16] ; cependant deux difficultés nouvelles apparaissent. La première est que la catégorie $MF(\mathcal{D}_X)$ des $\mathcal{D}_X$-Modules filtrés n'est pas abélienne et donc $D(MF(\mathcal{D}_X))$ n'a à priori pas de sens ; cependant, $MF(\mathcal{D}_X)$ est une catégorie exacte au sens de Quillen, i.e. admet une bonne notion de suites exactes courtes ; cette notion suffit pour dire ce qu'est un complexe acyclique dans $MF(\mathcal{D}_X)$ et donc pour donner un sens à $D(MF(\mathcal{D}_X))$ (ce point est dû à Deligne). La deuxième difficulté vient du fait que les filtrations considérées sont infinies ; en particulier, la suite spectrale associée à un complexe filtré (même borné) de $\mathcal{D}_X$-Modules ne dégénère pas en général ($d_r \neq 0$ pour tout $r \geqslant 0$ et donc $E_r \neq E_\infty$ pour tout $r \geqslant 0$).

. Voici le plan de l'exposé :

Au numéro 1, nous reprenons de manière un peu plus détaillée la construction de Deligne de la catégorie dérivée d'une catégorie exacte $\mathcal{C}$ et de la t-structure canonique sur cette catégorie dérivée quand les noyaux et coimages sont représentables dans $\mathcal{C}$. Nous étendons les critères usuels d'existence de foncteurs dérivés au cas des foncteurs entre catégories exactes.

Au numéro 2, nous recopions l'exposé d'Illusie, [16] I en remplaçant partout catégorie abélienne par catégorie exacte ; on constate alors que la plupart des résultats de [16] I restent valables.

Au numéro 3, on explicite les résultats du numéro 1 dans le cas de la catégorie exacte des Modules filtrés sur un Anneau filtré.

Au numéro 4, on explicite les résultats du numéro 2 dans le cas de la catégorie exacte des $\mathcal{D}_X$-Modules filtrés quasi-cohérents où $\mathcal{D}_X$ est l'Anneau des opérateurs différentiels d'un k-schéma lisse, k corps de caractéristique 0 . La plupart des résultats de ce numéro reste bien entendu valable dans un cadre beaucoup plus général mais que nous n'avons pas eu le courage d'expliciter.

Au numéro 5, nous construisons le foncteur $\int_f : DF(\mathcal{D}_X) \longrightarrow DF(\mathcal{D}_Y)$.

Au numéro 6, nous combinons les résultats du numéro 5 et le théorème de Riemann-Roch pour les $\mathcal{O}$-Modules cohérents pour obtenir en particulier la formule de Dubson-Kashiwara.

Au numéro 7, nous signalons quelques questions et résultats supplémentaires sans démonstrations, sur lesquels nous reviendrons.

Ce travail n'aurait pu voir le jour sans l'aide et les encouragements de L. Illusie, je lui en suis très reconnaissant ; je le remercie également pour ses suggestions pertinentes et les nombreuses améliorations qu'il a apportées à la rédaction finale. Je voudrais aussi remercier Mme Bonnardel qui a réalisé en un temps très bref et avec beaucoup de soin la frappe du manuscrit.

1. CATÉGORIES DÉRIVÉES DE CATÉGORIES EXACTES.

1.0. Soit C une catégorie additive et soit $\mathcal{E}$ une classe de suites de morphismes de C

$$(1.0.1) \qquad 0 \longrightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow 0 .$$

Appelons monomorphisme strict (resp. épimorphisme strict) toute flèche $E' \xrightarrow{u} E$ (resp. $E \xrightarrow{v} E''$) qui fait partie d'une suite exacte (1.0.1) de $\mathcal{E}$. Appelons morphisme strict toute flèche de C qui se factorise en un épimorphisme strict suivi d'un monomorphisme strict.

DÉFINITION 1.0.2 (Quillen, [11] §2). La catégorie C est dite exacte si elle est munie d'une classe $\mathcal{E}$ de suites (1.0.1) vérifiant les axiomes suivants :

(i) Toute suite (1.0.1) isomorphe à une suite de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{E}$.

(ii) Pour tout couple d'objets (E',E'') de C, la suite

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\binom{1}{0}} E' \oplus E'' \xrightarrow{(0,1)} E'' \longrightarrow 0$$

est dans $\mathcal{E}$.

(iii) Pour toute suite (1.0.1) de $\mathcal{E}$, $E' \xrightarrow{u} E$ est un noyau de $E \xrightarrow{v} E''$ et $E \xrightarrow{v} E''$ est un conoyau de $E' \xrightarrow{u} E$.

(iv) La classe des épimorphismes stricts (resp. monomorphismes stricts) est stable par composition.

(v) Pour tout épimorphisme strict $E \longrightarrow E''$ (resp. monomorphisme strict $E' \longrightarrow E$) et toute flèche $F \longrightarrow E''$ (resp. $E' \longrightarrow F$) de C, $F \times_{E''} E$ (resp. $F \amalg_{E'} E$) est représentable dans C et la flèche canonique $F \times_{E''} E \longrightarrow F$ (resp. $F \longrightarrow F \amalg_{E'} E$) est un épimorphisme strict (resp. un monomorphisme strict).

(vi) Si $E \xrightarrow{v} E''$ est un morphisme de C possédant un noyau dans C et s'il existe un morphisme $F \xrightarrow{w} E$ de C tel que $v \circ w$ soit un épimorphisme strict, alors $E \xrightarrow{v} E''$ est un épimorphisme strict. Dualement, si $E' \xrightarrow{u} E$ est un morphisme de C possédant un conoyau dans C et s'il existe un morphisme $E \xrightarrow{w} F$ de C tel que $w \circ u$ soit un monomorphisme strict, alors $E' \xrightarrow{u} E$ est un monomorphisme strict.

Nous dirons alors que les suites (1.0.1) de $\mathcal{E}$ sont les suites exactes de C.

Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ entre deux catégories exactes sera dit exact s'il est additif et s'il transforme suites exactes de $\mathcal{C}$ en suites exactes de $\mathcal{C}'$.

THÉORÈME 1.0.3 (Quillen, [11] §2). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte, il existe une catégorie abélienne $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ et un foncteur additif pleinement fidèle $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C})$ faisant de $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine additive de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, stable par extensions, telle qu'une suite (1.0.1) de $\mathcal{C}$ soit exacte si et seulement si son image par h est une suite exacte de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Preuve. On considère sur $\mathcal{C}$ la prétopologie de Grothendieck (cf. [15] II 1.3) suivante : les familles couvrantes de $E'' \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ sont les familles à un élément $\{E \xrightarrow{v} E''\}$ où v est un épimorphisme strict (les axiomes 1.0.2 (iv) et (v) non respés assurent que l'on a bien une prétopologie) ; $\mathcal{C}$ sera dans la suite munie de la topologie engendrée par cette prétopologie.

On note $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{C})$) la catégorie des préfaisceaux (resp. faisceaux) en groupes abéliens sur le site $\mathcal{C}$; les catégories $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ sont des catégories abéliennes (cf. [15] II 6.7).

Un objet f de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ n'est autre qu'un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans (Ab), la catégorie des groupes abéliens et cet objet est un faisceau si et seulement si, pour tout épimorphisme strict $E \xrightarrow{v} E''$, la suite dans (Ab)

$$0 \longrightarrow f(E') \xrightarrow{f(v)} f(E) \xrightarrow{\delta} f(E \times_{E''} E)$$

où $\delta = f(pr_1) - f(pr_2)$, est exacte. En particulier, si $f : \mathcal{C}^{o} \longrightarrow (\mathrm{Ab})$ est additif, f est un faisceau si, et seulement si, il est exact à gauche, i.e. transforme toute suite exacte (1.0.1) de $\mathcal{C}$ en

$$0 \longrightarrow f(E'') \longrightarrow f(E) \longrightarrow f(E')$$

exacte dans (Ab) (Quillen prend en fait pour $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs additif et exact à gauche de $\mathcal{C}^{o}$ dans (Ab), mais nous ne le suivrons pas sur ce point).

Notons $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$ le plongement de Yoneda : $h(E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,E)$; il est clair que, pour tout $E \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $h(E)$ est additif et exact à gauche (cf. 1.0.2 (iii)), donc $h(E)$ est en fait un faisceau ; h induit donc un foncteur, que l'on notera encore h, de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ (la topologie de $\mathcal{C}$ est moins fine que la topologie canonique).

Il est clair que h est additif. Pour toute suite exacte (1.0.1) de $\mathcal{C}$, il résulte de 1.0.2 (iii) que la suite

$$0 \longrightarrow h(E') \longrightarrow h(E) \longrightarrow h(E")$$

est exacte dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et donc dans $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ (le foncteur faisceau associé est exact à gauche) ; montrons que $h(E) \longrightarrow h(E")$ est un épimorphisme dans $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$: si $(F" \longrightarrow E") \in h(E")(F")$, $F = E \times_{E"} F" \longrightarrow F"$ existe et est un épimorphisme strict (cf. 1.0.2 (v) non respé) et $(F \longrightarrow E) \in h(E)(F)$ relève $(F" \longrightarrow E") \in h(E")(F")$, d'où la conclusion. Donc $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{C})$ est un foncteur exact.

Réciproquement, si pour une suite (1.0.1), la suite

$$0 \longrightarrow h(E') \longrightarrow h(E) \longrightarrow h(E") \longrightarrow 0$$

est exacte, on vérifie facilement que $E' \xrightarrow{u} E$ est un noyau de $E \xrightarrow{v} E"$; d'autre part, il existe un épimorphisme strict $F \longrightarrow E"$ et un élément $F \longrightarrow E$ de $h(E)(F)$ relevant $id_{E"} \in h(E")(E")$ ($h(E) \longrightarrow h(E")$ est un épimorphisme) ; par suite, il résulte de 1.0.2 (vi) que v est un épimorphisme strict ; la suite (1.0.1) est donc bien exacte dans $\mathcal{C}$ (cf. 1.0.2 (iii) et 1.0.2 (i)).

Il reste à montrer la stabilité par extensions de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$: soit

$$0 \longrightarrow h(E') \longrightarrow f \longrightarrow h(E") \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ avec $E', E" \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$; on montre comme ci-dessus qu'il existe un épimorphisme strict $F \longrightarrow E"$ et un élément α de $f(F)$ qui relève $id_{E"} \in h(E")(E")$; à l'aide de α, on définit une flèche $h(F) \longrightarrow f$ dans $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$, de sorte que l'on ait un diagramme commutatif dans $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & h(E') & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & h(E' \oplus F) & \xrightarrow{(0,1)} & h(F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & h(E') & \longrightarrow & f & \longrightarrow & h(E") & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans ce diagramme, les deux lignes sont exactes et la dernière colonne est un épimorphisme (on a vu que h est exact) ; par suite, le "lemme du serpent" montre que $h(E' \oplus F) \longrightarrow f$ est un épimorphisme et que la flèche canonique

$$\mathrm{Ker}(h(E' \oplus F) \longrightarrow f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(h(F) \longrightarrow h(E"))$$

est un isomorphisme ; soit $G \longrightarrow F$ un noyau de $F \longrightarrow E''$, on a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow h(G) \longrightarrow h(E' \oplus F) \longrightarrow f \longrightarrow 0$$

dans $\mathfrak{I}(\mathcal{C})$, où la flèche $h(G) \longrightarrow h(E' \oplus F)$ est l'image par h d'une flèche $G \longrightarrow E' \oplus F$ de $\mathcal{C}$ (h est pleinement fidèle) ; $G \longrightarrow F$ étant un monomorphisme strict par construction, $E' \amalg_G F$ est représentable (cf. 1.0.2 (v) respé) et $G \longrightarrow E' \oplus F$ a un conoyau ; par suite, il résulte de 1.0.2 (vi) que $G \longrightarrow E' \oplus F$ est un monomorphisme strict et f est isomorphe dans $\mathfrak{I}(\mathcal{C})$ à $h(C)$ où $C = E' \amalg_G F$ est le conoyau de $G \longrightarrow E' \oplus F$, ce qui achève la démonstration.

1.1. Rappelons la définition de la catégorie dérivée d'une catégorie exacte (cf. [2] 1.1.4).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte, on notera $C(\mathcal{C})$ la catégorie des complexes de $\mathcal{C}$ et $K(\mathcal{C})$ la catégorie dont les objets sont ceux de $C(\mathcal{C})$ mais dont les flèches sont les classes d'homotopie de flèches de $C(\mathcal{C})$.

Alors $K(\mathcal{C})$ est une catégorie triangulée : le foncteur de translation est donné par

$$(E^\cdot[1])^n = E^{n+1} \qquad (\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall E^\cdot \in \mathrm{ob}\ K(\mathcal{C}))$$

et les triangles distingués sont ceux qui sont isomorphes aux triangles obtenus comme suit : soit

$$0 \longrightarrow E^\cdot \xrightarrow{u^\cdot} F^\cdot \xrightarrow{v^\cdot} G^\cdot \longrightarrow 0$$

une suite de complexes de $\mathcal{C}$, exacte degré par degré et soit, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $s^n : G^n \longrightarrow F^n$ un scindage de la suite exacte en degré n ($s^\cdot$ n'est pas un morphisme de complexes), on associe à ces données le triangle

$$E^\cdot \xrightarrow{u^\cdot} F^\cdot \xrightarrow{v^\cdot} G^\cdot \xrightarrow{w^\cdot} E^\cdot[1]$$

où

$$w^n = d_E^n \circ s^n - s^{n+1} \circ d_G^n : G^n \longrightarrow E^{n+1} .$$

On définit $C^\alpha(\mathcal{C})$ (resp. $K^\alpha(\mathcal{C})$) pour $\alpha = +,-,b$ comme la sous-catégorie triangulée pleine de $C(\mathcal{C}) = C^\infty(\mathcal{C})$ (resp. $K(\mathcal{C}) = K^\infty(\mathcal{C})$) dont les objets sont les complexes bornés inférieurement ($\alpha = +$), bornés supérieurement ($\alpha = -$), bornés ($\alpha = b$).

1.2. On a une notion de complexes acycliques :

DÉFINITION 1.2.1. Un complexe $E^\cdot$ dans C sera dit acyclique en degré n si $h(E^\cdot)$ est acyclique en degré n ($h(E^\cdot) \in C(\mathfrak{I}(C))$, cf. 1.0.3). Si $E^\cdot$ est acyclique en tout degré, on dira simplement que $E^\cdot$ est acylique.

LEMME 1.2.2. Supposons que C vérifie la condition : (1.2.2.1) tout morphisme dans C admet un noyau dans C .

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes pour un objet $E^\cdot$ de $C(C)$:

(i) $E^\cdot$ est acyclique en degré n

(ii) $d_E^{n-1} : E^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^n$ est un épimorphisme strict

(iii) la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^{n-1} \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^n \longrightarrow 0$$

est exacte dans C .

Preuve. On a clairement (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) ; l'équivalence de (i) et (iii) résulte du fait que $h : C \longrightarrow \mathfrak{I}(C)$ commute au noyau (cf. [15] II, 4.4.0, $h = \varepsilon_C$ commute aux produits fibrés représentables).

LEMME 1.2.3.(i) Soient $E^\cdot$, $F^\cdot$ deux objets isomorphes de $K(C)$, alors $E^\cdot$ est acyclique en degré n si et seulement si il en est de même de $F^\cdot$.

(ii) Si $E^\cdot$ est acyclique en degré n , $E^\cdot[m]$ est acyclique en degré $m+n$.

(iii) Si

$$E^\cdot \longrightarrow F^\cdot \longrightarrow G^\cdot \longrightarrow E^\cdot[1]$$

est un triangle distingué de $K(C)$ et si $E^\cdot$ et $G^\cdot$ sont acycliques en degré n , il en est de même de $F^\cdot$.

Preuve. L'énoncé est bien connu si C est une catégorie abélienne ; la définition d'acyclique nous ramène à ce cas.

COROLLAIRE 1.2.4. La sous-catégorie pleine de $K(C)$ dont les objets sont les complexes acycliques est une sous-catégorie triangulée strictement pleine de $K(C)$.

On notera $K^\emptyset(C)$ ou $K^{\infty,\emptyset}(C)$ la sous-catégorie de $K(C) = K^\infty(C)$ considérée en 1.2.4 et on notera $K^{\alpha,\emptyset}(C)$ l'intersection de $K^\emptyset(C)$

avec $K^{\alpha}(\mathcal{C})$ $(\alpha = +,-,b)$; il résulte aussi de 1.2.3 que $K^{\alpha,\phi}(\mathcal{C})$ $(\alpha = +,-,b)$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine de $K^{\alpha}(\mathcal{C})$.

LEMME 1.2.5. La sous-catégorie strictement pleine triangulée $K^{\phi}(\mathcal{C})$ de $K(\mathcal{C})$ est épaisse.

Preuve. Même démonstration que pour 1.2.3.

COROLLAIRE 1.2.6. Pour $\alpha = +,-,b, K^{\alpha,\phi}(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine épaisse de $K^{\alpha}(\mathcal{C})$.

Preuve. Cela résulte de 1.2.5 et du critère de Verdier (cf. [14] §2, 4.2).

Nous pouvons donc considérer les catégories dérivées

$$D(\mathcal{C}) = D^{\infty}(\mathcal{C}) = K(\mathcal{C})/K^{\phi}(\mathcal{C})$$

et

$$D^{\alpha}(\mathcal{C}) = K^{\alpha}(\mathcal{C})/K^{\alpha,\phi}(\mathcal{C}) \qquad (\alpha = +,-,b) .$$

On a des foncteurs naturels

$$\begin{array}{ccccc} & & D^{b}(\mathcal{C}) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ D^{-}(\mathcal{C}) & & & & D^{+}(\mathcal{C}) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & D(\mathcal{C}) & & \end{array}$$

PROPOSITION 1.2.7. Si $\mathcal{C}$ vérifie (1.2.2.1), les foncteurs ci-dessus sont pleinement fidèles.

Preuve. Cela résulte du critère de Verdier (cf. [14] §2, 4.2) ; on vérifie la condition (b)(ii) de ce critère de la façon suivante : par exemple, si $E^{\cdot} \longrightarrow F^{\cdot}$ est un morphisme dans $C(\mathcal{C})$ à cône acyclique et si $F^{\cdot}$ est borné supérieurement, $E^{\cdot}$ est acyclique en degré n pour $n \gg 0$ et pour un tel n, $\operatorname{Ker} d_E^n$ existe et on peut "remplacer" $E^{\cdot}$ par

$$E'^{\cdot} = [\cdots \longrightarrow E^{n-2} \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots]$$

qui est lui borné supérieurement.

1.3. Les catégories les plus intéressantes pour notre propos sont les catégories exactes $\mathcal{C}$ qui vérifient de plus l'axiome suivant

(1.3.0) Tout morphisme $u : E \longrightarrow F$ de C possède un noyau $\operatorname{Ker} u \longrightarrow$ et une coimage $E \longrightarrow \operatorname{Coim} u$ et la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} u \longrightarrow E \longrightarrow \operatorname{Coim} u \longrightarrow 0$$

est exacte.

Remarques 1.3.0.1. (i) La flèche canonique $\operatorname{Coim} u \longrightarrow F$ est alors un monomorphisme non nécessairement strict.

(ii) Si C vérifie (1.0.3), $E^{\cdot} \in \operatorname{ob} C(C)$ est acyclique en degré n si et seulement si la flèche canonique $\operatorname{Coim} d_E^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^n$ est un isomorphisme.

(iii) On pourrait travailler dualement avec les images et conoyaux, mais de toute façon il faut choisir un des deux points de vue.

Dans toute la suite du numéro 1, C sera une catégorie exacte vérifiant (1.3.0).

On a alors des foncteurs "troncation canonique"

$$\tau_{\leqslant n}, \tau_{\geqslant n} : C(C) \longrightarrow C(C) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

définis comme suit :

$$\tau_{\leqslant 0} E^{\cdot} = [\cdots \longrightarrow E^{-2} \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots]$$

$$\tau_{\geqslant 0} E^{\cdot} = [\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Coim} d_E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots]$$

et

$$\tau_{\leqslant n} = [-n] \circ \tau_{\leqslant 0} \circ [n]$$

$$\tau_{\geqslant n} = [-n] \circ \tau_{\geqslant 0} \circ [n] \ .$$

Pour $n \leqslant m$, on a un carré commutatif de foncteurs

(1.3.0.2)
$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\leqslant m} & \longrightarrow & \mathrm{id} & \longrightarrow & \tau_{\geqslant n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \tau_{\geqslant n}\,\tau_{\leqslant m} & & \xrightarrow{\sim} & & \tau_{\leqslant m}\,\tau_{\geqslant n} \end{array}$$

où $\tau_{\geqslant n}\,\tau_{\leqslant m} E^{\cdot} \xrightarrow{\sim} \tau_{\leqslant m}\,\tau_{\geqslant n} E^{\cdot}$ n'est autre que

$$[\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Coim} d_E^{n-1} \longrightarrow E^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^m \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots] \ .$$

LEMME 1.3.1. (i) Les foncteurs $\tau_{\leqslant n}$, $\tau_{\geqslant n}$ induisent des foncteurs de $K(\mathcal{C})$ dans $K(\mathcal{C})$ que l'on notera de la même façon.

(ii) On a les inclusions

$$\tau_{\leqslant n}(K(\mathcal{C})) \subset K^{-}(\mathcal{C}) \ , \ \tau_{\geqslant n}(K(\mathcal{C})) \subset K^{+}(\mathcal{C})$$

$$\tau_{\leqslant n}(K^{+}(\mathcal{C})) \subset K^{b}(\mathcal{C}) \ , \ \tau_{\geqslant n}(K^{-}(\mathcal{C})) \subset K^{b}(\mathcal{C}) \ .$$

LEMME 1.3.2. (i) Pour tout $E^{\cdot} \in \text{ob } C(\mathcal{C})$ acyclique en degrés $> n$ (resp. $< n$), le cône de la flèche canonique $\tau_{\leqslant n} E^{\cdot} \longrightarrow E^{\cdot}$ (resp. $E^{\cdot} \longrightarrow \tau_{\geqslant n} E^{\cdot}$) est acyclique.

(ii) On a les inclusions

$$\tau_{\leqslant n}(K^{\emptyset}(\mathcal{C})) \subset K^{\emptyset}(\mathcal{C}), \tau_{\geqslant n}(K^{\emptyset}(\mathcal{C})) \subset K^{\emptyset}(\mathcal{C}) \ .$$

PROPOSITION 1.3.3. Pour toute suite de complexes de $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow E^{\cdot} \xrightarrow{u^{\cdot}} F^{\cdot} \xrightarrow{v^{\cdot}} G^{\cdot} \longrightarrow 0$$

qui est exacte degré par degré, la flèche naturelle $C^{\cdot} \longrightarrow G^{\cdot}$, où $C^{\cdot}$ est le cône de $u^{\cdot}$, est à cône acyclique.

1.4. Il résulte de 1.3.1 que les foncteurs $\tau_{\leqslant n}$, $\tau_{\geqslant n}$ induisent des foncteurs de $D(\mathcal{C})$ dans $D(\mathcal{C})$, notés encore $\tau_{\leqslant n}$, $\tau_{\geqslant n}$. De plus, il résulte de 1.3.3 que toute suite exacte degré par degré dans $C(\mathcal{C})$

$$0 \longrightarrow E^{\cdot} \xrightarrow{u^{\cdot}} F^{\cdot} \xrightarrow{v^{\cdot}} G^{\cdot} \longrightarrow 0$$

définit un triangle distingué

$$E^{\cdot} \xrightarrow{u^{\cdot}} F^{\cdot} \xrightarrow{v^{\cdot}} G^{\cdot} \xrightarrow{w^{\cdot}} E^{\cdot}[1]$$

dans $D(\mathcal{C})$ où $w^{\cdot}$ est défini par $G^{\cdot} \longleftarrow C^{\cdot} \longrightarrow E^{\cdot}[1]$ (cf. 1.3.3). Par suite, on a

PROPOSITION 1.4.1. Pour tout objet $E^{\cdot}$ de $C(\mathcal{C})$, la suite de complexes

$$0 \longrightarrow \tau_{\leqslant 0} E^{\cdot} \longrightarrow E^{\cdot} \longrightarrow \tau_{\geqslant 1} E^{\cdot} \longrightarrow 0$$

définit un triangle distingué

$$\tau_{\leqslant 0} E \longrightarrow E \longrightarrow \tau_{\geqslant 1} E \longrightarrow (\tau_{\leqslant 0} E)[1]$$

dans $D(\mathcal{C})$.

THÉORÈME 1.4.2 (Deligne). *Soient* $D(C)^{\leqslant 0}$ (*resp.* $D(C)^{\geqslant 0}$) *la sous-catégorie strictement pleine de* $D(C)$ *formée des complexes acycliques en tout degré* > 0 (*resp.* < 0). *Alors* $(D(C)^{\leqslant 0}, D(C)^{\geqslant 0})$ *est une t-structure sur* $D(C)$ *qui est non dégénérée.*

Preuve. [2] 1.3.19.

COROLLAIRE 1.4.3. *Pour tout* $\alpha = +,-,b$, *posons* $D^{\alpha}(C)^{\leqslant 0} = D^{\alpha}(C) \cap D(C)^{\leqslant 0}$ *et* $D^{\alpha}(C)^{\geqslant 0} = D^{\alpha}(C) \cap D(C)^{\geqslant 0}$. *Alors* $(D^{\alpha}(C)^{\leqslant 0}, D^{\alpha}(C)^{\geqslant 0})$ *est une t-structure non dégénérée sur* $D^{\alpha}(C)$.

Preuve. Le seul point à vérifier est que, pour $F \in \text{ob } D^{\alpha}(C)$, le triangle de $D(C)$

$$E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow E[1]$$

avec $E \in \text{ob } D(C)^{\leqslant 0}$ et $G \in \text{ob } D(C)^{\geqslant 1}$ peut être pris dans $D^{\alpha}(C)$, mais cela résulte aussitôt de 1.4.1 et des inclusions $\tau_{\leqslant 0}(D^{\alpha}(C)) \subset D^{\alpha}(C), \tau_{\geqslant 1}(D^{\alpha}(C)) \subset D^{\alpha}(C)$.

Remarque 1.4.4. Les foncteurs de troncation canonique au sens des t-structures ci-dessus coïncident avec nos $\tau_{\leqslant n}$ et $\tau_{\geqslant n}$.

On dispose donc de catégories abéliennes (cf. [2] 1.3.6)

$$\mathcal{A}^{\infty} = D(C)^{\leqslant 0} \cap D(C)^{\geqslant 0}$$

$$\mathcal{A}^{\alpha} = D^{\alpha}(C)^{\leqslant 0} \cap D^{\alpha}(C)^{\geqslant 0} \qquad (\alpha = -,+,b)$$

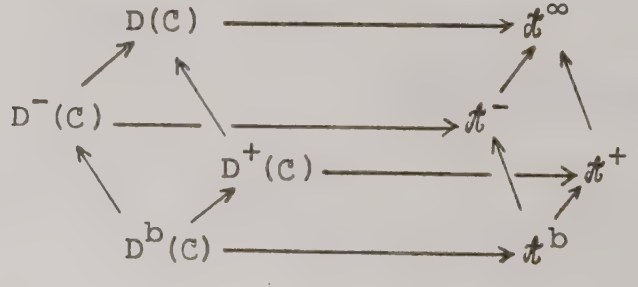
qui sont des sous-catégories abéliennes admissibles et stables par extension de $D(C)$ et $D^{\alpha}(C)$ respectivement. De plus les foncteurs

$$H^0_{\tau} = \tau_{\geqslant 0}\, \tau_{\leqslant 0} : D(C) \longrightarrow \mathcal{A}^{\infty}$$

$$H^0_{\tau} = \tau_{\geqslant 0}\, \tau_{\leqslant 0} : D^{\alpha}(C) \longrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}$$

sont des foncteurs cohomologiques.

En fait on a un diagramme commutatif



où les flèches horizontales sont les foncteurs cohomologiques H^o_τ et où les flèches obliques sont pleinement fidèles. D'autre part, tout objet de $\mathcal{A}^\infty$ (resp. $\mathcal{A}^-$, $\mathcal{A}^+$) est isomorphe dans $\mathcal{A}^\infty$ (resp. $\mathcal{A}^-$, $\mathcal{A}^+$) a un objet de $\mathcal{A}^b$ à savoir son image par H^o_τ qui est de toute façon dans $\mathcal{A}^b$ (le carré (1.3.0.2) appliqué à un objet de $\mathcal{A} = D(\mathcal{C})^{\langle 0} \cap D(\mathcal{C})^{\rangle 0}$ pour $n = m = 0$ a toutes ses flèches qui sont des isomorphismes).

1.5. Nous allons décrire plus explicitement une sous-catégorie abélienne pleine de $\mathcal{A}$ telle que tout objet de $\mathcal{A}^\alpha$ soit isomorphe dans $\mathcal{A}^\alpha$ à un objet de $\mathcal{A}$ pour $\alpha = \infty, -, +, b$ et à travers laquelle se factorise H^o_τ.

Nous procédons comme Deligne le fait dans [2], 1.3.19. Commençons par remarquer que, pour tout objet E de $D(\mathcal{C})$, $H^o_\tau(E)$ est un complexe concentré en degrés 0 et -1

$$--- \longrightarrow 0 \longrightarrow K^{-1} \xrightarrow{d} K^o \longrightarrow 0 \longrightarrow ---$$

et donc s'identifie au complexe de longueur 1

$$[K^{-1} \xrightarrow{d} K^o] \quad . \tag{1.5.1}$$

De plus ce complexe est acyclique en degré $\neq 0$ ce qui se traduit simplement par le fait que $d : K^{-1} \longrightarrow K^o$ est un monomorphisme (pas nécessairement strict !).

Un morphisme de $C(\mathcal{C})$ entre deux complexes $[K^{-1} \xrightarrow{d_K} K^o] = K^\cdot$ et $[L^{-1} \xrightarrow{d_L} L^o] = L^\cdot$ comme ci-dessus est uniquement déterminé par sa composante en degré 0 car d_L est un monomorphisme ; réciproquement, une flèche $f^o : K^o \longrightarrow L^o$ de $\mathcal{C}$ est la composante de degré 0 d'un morphisme $f^\cdot : K^\cdot \longrightarrow L^\cdot$ de $C(\mathcal{C})$ si et seulement si $f^o \circ d_K : K^{-1} \longrightarrow L^o$ se factorise (de manière unique) par $d_L : L^{-1} \longrightarrow L^o$, ce que nous noterons suggestivement par

$$f^o(K^{-1}) \subset L^{-1} \quad . \tag{1.5.2}$$

Pour qu'un tel $f^\cdot$ soit homotope à zéro, il faut et il suffit que f^o lui-même se factorise par $d_L : L^{-1} \longrightarrow L^o$, ce que nous noterons

$$f^o(K^o) \subset L^{-1} \quad . \tag{1.5.3}$$

Le cône d'une telle flèche $f^\cdot : K^\cdot \longrightarrow L^\cdot$ est le complexe concentré en degré $-2, -1, 0$

$$--- \; 0 \longrightarrow K^{-1} \xrightarrow{\binom{-d_K}{f^{-1}}} K^o \oplus L^{-1} \xrightarrow{(f^o, d_L)} L^o \longrightarrow 0 \longrightarrow --- \quad .$$

Dire que ce cône est acyclique, c'est dire que la suite

$$(1.5.4) \qquad 0 \longrightarrow K^{-1} \xrightarrow{\binom{-d_K}{f^{-1}}} K^0 \oplus L^{-1} \xrightarrow{(f^0, d_L)} L^0 \longrightarrow 0$$

est exacte.

On a, pour K et L deux objets comme ci-dessus,

$$(1.5.5) \qquad \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{C})}(K,L) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(K'^{\cdot},L^{\cdot})$$

où la limite est prise sur les $u^{\cdot} : K'^{\cdot} \longrightarrow K^{\cdot}$ à cône acyclique avec $K'^{\cdot}$ du même type que $K^{\cdot}$ (concentré en degré $-1,0$, avec $d^{-1}_{K'}$ un monomorphisme) et où

$$(1.5.6) \qquad \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(K'^{\cdot},L^{\cdot}) = \frac{\{f^0 : K'^0 \longrightarrow L^0 \mid f^0(K'^{-1}) \subset L^{-1}\}}{\{f^0 : K'^0 \longrightarrow L^0 \mid f^0(K'^0) \subset L^{-1}\}}$$

(les flèches de transition dans la limite inductive sont injectives).

DEFINITION 1.5.7. Nous noterons $\mathcal{A}$ la catégorie dont les objets sont les complexes de longueur 1 à différentielle un monomorphisme (cf. (1.5.1)) et dont les morphismes entre deux objets $[K^{-1} \longrightarrow K^0]$ et $[L^{-1} \longrightarrow L^0]$ identifiés à deux objets K et L de $D(\mathcal{C})$ sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}([K^{-1} \longrightarrow K^0],[L^{-1} \longrightarrow L^0]) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{C})}(K,L)$$

où $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{C})}(K,L)$ est décrit explicitement par (1.5.5) et (1.5.6).

Alors $\mathcal{A}$ s'identifie à une sous-catégorie abélienne pleine de $\mathcal{A}^{\alpha}$ telle que tout objet de $\mathcal{A}^{\alpha}$ soit isomorphe dans $\mathcal{A}^{\alpha}$ à un objet (au moins de $\mathcal{A}$ ($\alpha = \infty, -, +, b$).

De plus, H^0_{τ} se factorise à travers $\mathcal{A}$ par construction.

Le foncteur composé

$$(1.5.8) \qquad \mathcal{C} \xrightarrow{E \longmapsto E[0]} D(\mathcal{C}) \xrightarrow{H^0_{\tau}} \mathcal{A}$$

est pleinement fidèle et identifie $\mathcal{C}$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les $[0 \longrightarrow E]$, $E \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$. Un objet $[K^{-1} \xrightarrow{d} K^0]$ de $\mathcal{A}$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{C}$ si et seulement si d est un monomorphisme strict et alors l'objet de $\mathcal{C}$ correspondant est $\mathrm{Coker}\, d$. Une suite

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

de morphisme de $\mathcal{C}$ est alors exacte si et seulement si son image par (1.5.8) l'est dans $\mathcal{A}$. $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{A}$ stable par

extension et la formation des noyaux et coimages commutent à (1.5.8).

Remarque 1.5.9. Si $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur exact à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathcal{B}$ tel que $\mathrm{Ker}\,\phi(u) = \phi\,\mathrm{Ker}\,u$ pour toute flèche u de $\mathcal{C}$, alors ϕ se prolonge en un foncteur exact $\tilde{\phi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ qui envoie $[K^{-1} \xrightarrow{d} K^0]$ sur $\mathrm{Coker}\,\phi(d)$, $\phi(d)$ étant un monomorphisme dans $\mathcal{B}$ puisque $\mathrm{Ker}\,\phi(d) = \phi\,\mathrm{Ker}\,d = 0$. Le foncteur (1.5.8) apparait donc comme solution d'un problème universel.

1.6. Soient K et K' deux catégories triangulées, K^ϕ et K'^ϕ des sous-catégories triangulées strictement pleines épaisses de K et K' respectivement, $D = K/K^\phi$ et $D' = K'/K'^\phi$ les catégories dérivées correspondantes, $q : K \longrightarrow D$ et $q' : K' \longrightarrow D'$ les foncteurs localisation et $\varphi : K \longrightarrow K'$ un foncteur triangulé (i.e. additif et transformant triangles distingués en triangles distingués).

Rappelons la définition, due à Deligne, des foncteurs dérivés droit et gauche de φ (cf. [15] XVII 1.2) :

DÉFINITION 1.6.1. Le foncteur $\varphi : K \longrightarrow K'$ est dit dérivable à droite (resp. à gauche) si, pour tout $E \in \mathrm{ob}\,K$, le ind-objet (resp. pro-objet) de D'

$$(1.6.1.1) \qquad R\varphi E = \text{"}\varinjlim_{E \to F}\text{"}\; q'\varphi F \quad (\text{resp. } L\varphi E = \text{"}\varprojlim_{F \to E}\text{"}\; q'\varphi F)$$

où $E \longrightarrow F$ (resp. $F \longrightarrow E$) parcourt les flèches de K de source (resp. but) E d'images par q un isomorphisme dans D, est un ind-objet (resp. pro-objet) essentiellement constant.

Si φ est dérivable à droite (resp. à gauche), on appelle foncteur dérivé droit (resp. gauche) de f et on note encore $R\varphi$ (resp. $L\varphi$) le foncteur triangulé de D dans D' induit par (1.6.1.1).

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories exactes et soit $\varphi : K^\alpha(\mathcal{C}) \longrightarrow K^\alpha(\mathcal{C}')$ un foncteur triangulé, on a alors des notions de dérivabilités et de foncteurs dérivés de φ, relativement à $K^{\alpha,\phi}(\mathcal{C})$ et $K^{\alpha,\phi}(\mathcal{C}')$ (cf. 1.2) ; si φ est induit par $g : C^\alpha(\mathcal{C}) \longrightarrow C^\alpha(\mathcal{C}')$ on dira encore que g est dérivable à droite (resp. à gauche) si φ l'est et on notera encore Rg (resp. Lg) le foncteur dérivé droit (resp. gauche) de φ ; si $f : \mathcal{C} \longrightarrow C^b(\mathcal{C}')$ est un foncteur additif qui induit $g = \underline{s} \circ C^\alpha(f) : C^\alpha(\mathcal{C}) \longrightarrow C^\alpha(C^b(\mathcal{C}')) \xrightarrow{\underline{s}} C^\alpha(\mathcal{C}')$ où $\underline{s}$ est le foncteur "complexe simple associé" (en particulier, si $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur additif qui induit $g = C^\alpha(f) : C^\alpha(\mathcal{C}) \longrightarrow C^\alpha(\mathcal{C}')$), on dira, par abus de langage, que f est dérivable à droite (resp. à

gauche) si g l'est et on notera encore Rf (resp. Lf) le foncteur dérivé droit (resp. gauche) de f ($\alpha = \infty, +, -, b$).

LEMME 1.6.2. *Si* $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ (*resp.* $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^b(\mathcal{C}')$) *est un foncteur additif qui transforme complexes acycliques de* $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{C})$ *en complexes acycliques de* $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{C}')$ (*resp.* $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{C}^b(\mathcal{C}'))$), *alors* f *est dérivable à droite et à gauche sur* D^α *et, pour* $E^\cdot \in \mathrm{ob}\, K^\alpha(\mathcal{C})$, *on a*

$$RfqE^\cdot = LfqE^\cdot = q'K^\alpha(f)E^\cdot$$

(*resp.*
$$RfqE^\cdot = LFqE^\cdot = q's K^\alpha(f)E^\cdot) .$$

Remarque 1.6.2.1. Si $\mathcal{C}$ vérifie la condition (1.2.2.1) (tout morphisme dans $\mathcal{C}$ admet un noyau dans $\mathcal{C}$), l'hypothèse de 1.6.2 équivaut à l'exactitude de f (cf. 1.2.2).

Dans toute la suite $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *désignera un foncteur additif entre deux catégories exactes vérifiant* (1.3.0).

DÉFINITION 1.6.3. *Un objet* E *de* $\mathcal{C}$ *est dit déployé à droite* (*resp. à gauche*) *pour* f *si le morphisme canonique de* $D(\mathcal{C}')$

$$q'fE \longrightarrow RfE \quad (\text{resp. } LfE \longrightarrow q'fE)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 1.6.4. *Soit* I (*resp.* P) *une partie de* $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ *vérifiant*

(i) *tout objet de* $\mathcal{C}$ *est la source* (*resp. le but*) *d'un monomorphisme strict* (*resp. épimorphisme strict*) *de but* (*resp. de source*) *un objet de* I (*resp.* P),

(ii) *pour toute suite exacte dans* $\mathcal{C}$,

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

où E', E (*resp.* E, E'') *sont dans* I (*resp.* P), *on a* $E'' \in I$ (*resp.* $E' \in P$) *et la suite dans* $\mathcal{C}'$

$$0 \longrightarrow fE' \longrightarrow fE \longrightarrow fE'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

Alors tout objet de I (*resp.* P) *est déployé à droite* (*resp. à gauche*) *pour* f .

Preuve. On se limitera à la partie non respée de l'assertion. Commençons par remarquer que, pour tout objet E de $\mathcal{C}$, les "résolutions" à

droite de E forment un système final dans la catégorie filtrante des flèches $E \longrightarrow F^\cdot$ de $K(C)$ à cône acyclique : si $E^\cdot \longrightarrow F^\cdot$ est une telle flèche, la flèche composée $E \longrightarrow F^\cdot \longrightarrow \tau_{\geqslant 0} F^\cdot$ est aussi à cône acyclique, donc on peut supposer $F^n = 0$ pour $n < -1$; alors, on a

$$(n^0, d_F^{-1}) : E \oplus F^{-1} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} d_F^0$$

de sorte que $d_F^{-1} : F^{-1} \longrightarrow F^0$ est un monomorphisme strict (cf. 1.0.2 (ii) et (iv)) et que d_F^{-1} a un conoyau $\tilde{F}^0$ (cf. 1.0.2 (iii)) ; la flèche composée

$$E \longrightarrow F^\cdot \longrightarrow [\tilde{F}^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \text{---}]$$

est encore à cône acyclique et est une "résolution" à droite de E, i.e. est un complexe acyclique

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \tilde{F}^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \text{---} .$$

Maintenant, montrons que, pour tout $E \in I$, les "résolutions" à droite de E par des objets dans I, forment un système final dans la catégorie des "résolutions" à droite de E. Si

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \text{---}$$

est une "résolution" à droite de E, on définit une "résolution" à droite de E dans I

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \text{---}$$

et une flèche $E^\cdot \xrightarrow{u^\cdot} F^\cdot$ comme suit : on prend pour $E^0 \hookrightarrow F^0$ un monomorphisme strict avec $F^0 \in I$; puis on raisonne par récurrence sur n, en supposant construit $[E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \text{----} \longrightarrow E^n] \xrightarrow{u^\cdot} [F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \text{----} \longrightarrow F^n]$ avec $F^0, F^1, \ldots, F^n \in I$, avec les suites

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F^0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_F^1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_F^1 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_F^2 \longrightarrow 0$$

$$\text{----------}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_F^{n-2} \longrightarrow F^{n-2} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_F^{n-1} \longrightarrow 0$$

exactes dans C et avec $\operatorname{Coim} d_F^{n-1} \longrightarrow F^n$ un monomorphisme strict ; alors, soit $F^n \longrightarrow \tilde{F}^n$ un conoyau de $\operatorname{Coim} d_F^{n-1} \longrightarrow F^n$ (cf. 1.0.2 (iii)), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E^n & \twoheadrightarrow & \operatorname{Ker} d_F^{n+1} & \hookrightarrow & E^{n+1} \\ \downarrow u^n & & \downarrow & & \downarrow \\ F^n & \twoheadrightarrow & \tilde{F}^n & \hookrightarrow & F_1^{n+1} \end{array}$$

où $F_1^{n+1} = \tilde{F}^n \amalg_{\operatorname{Ker} d_F^{n+1}} E^{n+1}$ (cf. 1.0.2 (v)) et si on choisit un monomorphisme strict $F_1^{n+1} \hookrightarrow F^{n+1}$ avec $F^{n+1} \in I$, on a terminé.

Enfin, si $E \in I$ et si

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

est une "résolution" à droite dans I de E, on dévisse cette résolution en suites exactes de C

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^i \longrightarrow E^i \longrightarrow \operatorname{Ker} d_E^{i+1} \longrightarrow 0 \quad (i \geqslant 0) ;$$

pour $i = 0$, on a $\operatorname{Ker} d_E^0 \simeq E$, ceci permet de montrer, par récurrence sur i, que $\operatorname{Ker} d_E^i \in I$ pour tout $i \geqslant 0$, puisque

$$0 \longrightarrow f \operatorname{Ker} d_E^i \longrightarrow fE^i \longrightarrow f \operatorname{Ker} d_E^{i+1} \longrightarrow 0$$

est exacte dans C', pour tout $i \geqslant 0$; alors

$$0 \longrightarrow fE \longrightarrow fE^0 \longrightarrow fE^1 \longrightarrow \cdots$$

est acyclique dans C', d'où la conclusion.

PROPOSITION 1.6.5. *Si tout objet de C est la source (resp. le but) d'un monomorphisme strict (resp. épimorphisme strict) de but (resp. de source) déployé à droite (resp. à gauche) pour f, f est dérivable à droite (resp. à gauche) sur $D^+(C)$ (resp. $D^-(C)$) et pour tout complexe $E^\cdot$ borné supérieurement (resp. inférieurement) d'objets déployés à droite (resp. à gauche) pour f, on a*

$$RfE^\cdot = q' \circ f(E^\cdot)$$

(*resp.*

$$LfE^\cdot = q' \circ f(E^\cdot)) .$$

Preuve. On ne traitera que l'assertion non respée. Commençons par montrer que, pour tout $E^\cdot \in \operatorname{ob} K^+(C)$, les flèches à cônes acycliques $E^\cdot \longrightarrow F^\cdot$ dans $K^+(C)$, avec $F^\cdot$ à composantes déployées à droite pou f, forment un système final dans la catégorie des flèches à cônes acycliques dans $K^+(C)$ de source $E^\cdot$. Pour cela, on peut supposer $E^n = 0$ pour $n < 0$ et on raisonne par récurrence sur n en supposant

construit $[E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n] \xrightarrow{u^\cdot} [F^0 \to F^1 \to \cdots \to F^n]$ avec $F^0, F^1, \ldots, F^n$ déployés à droite pour f, avec $H^i_T(E^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^i_T(F^\cdot)$ pour $i < n$ et avec un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Coim} d_E^{n-1} & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_E^n & \hookrightarrow & E^n & \twoheadrightarrow & \operatorname{Coim} d_E^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Coim} d_F^{n-1} & \longrightarrow & K^n & \hookrightarrow & F^n & \twoheadrightarrow & C^n \end{array} \qquad (*)$$

où toutes les flèches verticales sont des monomorphismes stricts, où le carré (*) est cocartésien et où la suite

$$0 \longrightarrow K^n \longrightarrow F^n \longrightarrow C^n \longrightarrow 0$$

est exacte dans $\mathcal{C}$; il s'agit de reproduire cette situation au cran $n+1$ (au cran 0, on prend pour $E^0 \hookrightarrow F^0$ un monomorphisme strict avec F^0 déployé à droite pour f et, pour K^0, on prend $\operatorname{Ker} d_E^0$, de sorte que $C^0 = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} d_E^0 \hookrightarrow F^0)$) ; pour cela, on définit K^{n+1} par

$$K^{n+1} = C^n \amalg_{\operatorname{Coim} d_E^n} \operatorname{Ker} d_E^{n+1}$$

(cf. 1.0.2 (v)), puis on prend pour F^{n+1} un objet déployé à droite pour f, but d'un monomorphisme strict

$$K^{n+1} \amalg_{\operatorname{Ker} d_E^{n+1}} E^{n+1} \hookrightarrow F^{n+1}$$

(cf. 1.0.2 (v)) et il ne reste plus qu'à prendre pour C^{n+1} le conoyau du monomorphisme strict $K^{n+1} \hookrightarrow F^{n+1}$ (cf. 1.0.2 (iii)) ; alors K^n et C^n s'identifient au noyau et à la coimage respectivement de

$$d_F^n : F^n \twoheadrightarrow C^n \longrightarrow K^{n+1} \hookrightarrow F^{n+1}$$

ce qui achève de démontrer l'assertion au cran $n+1$.

Il reste à montrer que, pour $E^\cdot \xrightarrow{u^\cdot} F^\cdot$ dans $K^+(\mathcal{C})$ avec $E^\cdot$, $F^\cdot$ à composantes déployées à droite pour f et avec $u^\cdot$ à cône acyclique,

$$K^+(f)(u^\cdot) : K^+(f)(E^\cdot) \longrightarrow K^+(f)(F^\cdot)$$

est aussi à cône acyclique ; comme f est additif, le cône de $K^+(f)(u^\cdot)$ est $K^+(f)(C^\cdot)$, où $C^\cdot$ est le cône de $u^\cdot$, et on est ramené à montrer que, pour $C^\cdot \in \operatorname{ob} K^{+,\emptyset}(\mathcal{C})$, à composantes déployées à droites pour f, $K^+(f)(C^\cdot)$ est aussi acyclique ; supposons dans un premier temps $C^\cdot$ borné, alors $q' \circ K^+(f)(C^\cdot) \simeq Rf(qC^\cdot)$ car les objets de $K^+(\mathcal{C})$ qui

vérifient cette propriété forment clairement une sous-catégorie triangulée de $K^+(\mathcal{C})$ contenant les C^n $(n \in \mathbb{Z})$; par suite, comme $qC^\cdot = 0$, $K^+(f)(C^\cdot)$ est bien à cône acyclique ; dans le cas général, il s'agit de montrer que $H_\tau^n(K^+(f)(C^\cdot)) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, or $H_\tau^n = H_\tau^n \circ \tau_{\leqslant n+2}$ et on a clairement $H_\tau^n(K^+(f)(C^\cdot)) = H_\tau^n(K^b(f)(\tau_{\leqslant n+2} C^\cdot))$; comme $\tau_{\leqslant n+2} C^\cdot \in K^{b,\phi}(\mathcal{C})$ est encore à composantes déployées à droite pour f (par récurrence sur m, $\operatorname{Ker} d_C^m$ est acyclique à droite pour f pour tout $m \in \mathbb{Z}$), on a terminé.

PROPOSITION 1.6.6. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ trois catégories exactes et $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{C}'$, $\mathcal{C}' \xrightarrow{g} \mathcal{C}''$ deux foncteurs additifs. Si tout objet de $\mathcal{C}'$ est la source d'un monomorphisme strict de but déployé à droite pour g et si tout objet de $\mathcal{C}$ est la source d'un monomorphisme strict de but déployé à droite pour f et transformé par f en un objet déployé à droite pour g, alors f, g, $g \circ f$ sont dérivables à droite sur D^+ et on a un isomorphisme canonique $R(g \circ f) \simeq Rg \circ Rf$ (resp. énoncé analogue pour les dérivés à gauche).

2. COMPLEXES PARFAITS D'OBJETS D'UNE CATÉGORIE EXACTE.

2.0. Soit $\mathcal{S}$ un site et soit X un objet de $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{S}$-catégorie fibrée à fibres des catégories exactes vérifiant (1.3.0) et à foncteurs "image inverse" exacts et commutant aux noyaux ; soit $\mathcal{C}_o$ une sous-$\mathcal{S}$-catégorie fibrée strictement pleine de $\mathcal{C}$ à fibres des sous-catégories additives des fibres de $\mathcal{C}$.

On fait les hypothèses suivantes (cf. [16] I.1.2) :

(2.0.1) $\mathcal{C}_o$ <u>est localement relevable dans</u> $\mathcal{C}$: pour tout $U \in \mathrm{ob}\,\mathcal{S}$ et pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

dans $\mathcal{C}(U)$ où $G \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}_o(U)$ et où u est un épimorphisme strict, l'ensemble des $V \longrightarrow U$ dans $\mathcal{S}$ tels qu'il existe une section

$$\begin{array}{ccc} & \overset{v}{\swarrow} & G_V \\ & & \downarrow \\ E_V & \xrightarrow{u_V} & F_V \end{array}$$

de u_V au-dessus de G_V est un raffinement de U dans $\mathcal{S}$.

(2.0.2) $\mathcal{C}_o$ <u>est localement stable par noyau d'épimorphismes stricts</u> : pour tout $U \in \mathrm{ob}\,\mathcal{S}$ et pour tout épimorphisme strict $u : E \longrightarrow F$ dans $\mathcal{C}(U)$ avec $E, F \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}_o(U)$, l'ensemble des $V \longrightarrow U$ dans $\mathcal{S}$ tels que $(\mathrm{Ker}\,u)_V = \mathrm{Ker}(u_V)$ soit un objet de $\mathcal{C}_o(V)$ est un raffinement de U dans $\mathcal{S}$.

<u>Remarque</u> 2.0.3. Un exemple type de triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_o)$ est le suivant : $\mathcal{S}$ est le site zariskien d'un schéma X, pour tout ouvert U de , $\mathcal{C}(U)$ est la catégorie des $\mathcal{O}_U$-Modules, $\mathcal{C}_o(U)$ est la catégorie des $\mathcal{O}_U$-Modules facteurs directs de $\mathcal{O}_U$-Modules libres de type fini.

DÉFINITION 2.1. <u>Soit</u> $E^\cdot$ <u>un complexe de</u> $\mathcal{C}(X)$. <u>Nous dirons que</u> $E^\cdot$ <u>est strictement parfait</u> (<u>relativement à</u> $\mathcal{C}_o$) <u>si</u> $E^n = 0$ <u>pour presque tout</u> $n \in \mathbb{Z}$ <u>et si</u> $E^n \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}_o(X)$ <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITION 2.2. Soit

$$\begin{array}{ccc} & & P^\cdot \\ & & \downarrow v^\cdot \\ E^\cdot & \xrightarrow{u^\cdot} & F^\cdot \end{array}$$

un diagramme de $C(\mathcal{C}(X))$ où $P^\cdot$ est strictement parfait et où $u^\cdot$ est à cône acyclique. Alors l'ensemble des $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ tels qu'il existe une flèche $w^\cdot : P^\cdot_U \longrightarrow E^\cdot_U$ dans $C(\mathcal{C}(U))$ faisant commuter dans $K(\mathcal{C}(U))$ (i.e. à homotopie près) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \overset{w^\cdot}{\swarrow} & P^\cdot_U \\ & & \downarrow v^\cdot_U \\ E^\cdot_U & \xrightarrow{u^\cdot_U} & F^\cdot_U \end{array}$$

est un raffinement de X dans $\mathcal{S}$.

Preuve. Soit $C^\cdot$ le cône de $u^\cdot$, on a la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C}(X))}(P^\cdot,E^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C}(X))}(P^\cdot,F^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C}(X))}(P^\cdot,C^\cdot) \longrightarrow 0$$

donc tout revient à voir que l'image de $v^\cdot$ dans $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C}(X))}(P^\cdot,C^\cdot)$ est localement nulle ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 2.2.1. Soit $u^\cdot : E^\cdot \longrightarrow F^\cdot$ une flèche de $C(\mathcal{C}(X))$ avec $E^\cdot$ strictement parfait, et $F^\cdot$ acyclique. Alors $u^\cdot$ est localement homotope à zéro.

Preuve. On veut construire localement $(k^i : E^i \longrightarrow F^{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que $u^i = d_F^{i-1}\circ k^i + k^{i+1}\circ d_E^i$. On fait cela par récurrence descendante sur i en remarquant qu'il n'y a qu'un nombre fini d'étapes car, si $E^i = 0$ pour $i \notin [a,b] \subset \mathbb{Z}$, on a nécessairement $k^i = 0$ pour $i \notin [a,b]$. Supposons donc construit $k^i : E^i \longrightarrow F^{i-1}$ avec $u^i = d_F^{i-1}\circ k^i + k^{i+1}\circ d_E^i$ pour tout $i > n$ et montrons que, quitte à se localiser, il existe $k^{n-1} : E^{n-1} \longrightarrow F^{n-2}$ avec $u^{n-1} = d_F^{n-2}\circ k^{n-1} + k^n \circ d_E^{n-1}$. Par hypothèse de récurrence,

$$v^{n-1} = u^{n-1} - k^n \circ d_E^{n-1} : E^{n-1} \longrightarrow F^{n-1}$$

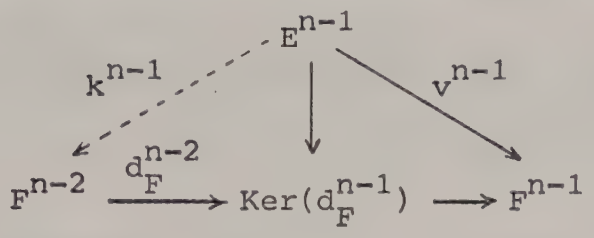
vérifie

$$d_F^{n-1}\circ v^{n-1} = (u^n - d_F^{n-1}\circ k^n)\circ d_E^{n-1} = k^{n+1}\circ d_E^n \circ d_E^{n-1} = 0$$

et v^{n-1} se factorise par $\mathrm{Ker}(d_F^{n-1}) \longrightarrow F^{n-1}$. Or, $F^\cdot$ est acyclique en degré $n-1$ et donc la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_F^{n-2}) \longrightarrow F^{n-2} \xrightarrow{d_F^{n-2}} \mathrm{Ker}(d_F^{n-1}) \longrightarrow 0$$

est exacte, par suite, comme C_o est localement relevable dans $\mathcal{C}$, il existe localement $k^{n-1} : E^{n-1} \longrightarrow F^{n-2}$ faisant commuter le diagramme



d'où le lemme.

Notations 2.2.2. On dispose de $\mathcal{S}$-catégories fibrées $C(\mathcal{C})$, $K(\mathcal{C})$, $D(\mathcal{C})$, $K^{\alpha}(\mathcal{C})$, $K^{\alpha,\phi}(\mathcal{C})$, $D^{\alpha}(\mathcal{C})$ $(\alpha = -,+,b)$, dont les fibres en $U \in \mathrm{ob}\,\mathcal{S}$ sont respectivement $C(\mathcal{C}(U))$, $K(\mathcal{C}(U))$, $D(\mathcal{C}(U))$, $K^{\alpha}(\mathcal{C}(U))$, $K^{\alpha,\phi}(\mathcal{C}(U))$, $D^{\alpha}(\mathcal{C}(U))$ et dont les foncteurs images inverses sont exacts (les fibres de $C(\mathcal{C})$ sont des catégories exactes et les fibres de $K(\mathcal{C})$, $D(\mathcal{C})$, $K^{\alpha}(\mathcal{C})$ et $D^{\alpha}(\mathcal{C})$ sont des catégories triangulées).

Enfin, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{S}$-catégorie fibrée, nous noterons, pour tous $M,N \in \mathrm{ob}\,\mathcal{M}(X)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{M}}(M,N)$ le faisceau sur $\mathcal{S}/X$ associé au préfaisceau

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(U)}(M_U, N_U) .$$

COROLLAIRE 2.2.3. Soient $E^{\cdot}, F^{\cdot} \in \mathrm{ob}\, C(\mathcal{C}(X))$, $E^{\cdot}$ étant strictement parfait. La flèche canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{K(\mathcal{C})}(E^{\cdot}, F^{\cdot}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{D(\mathcal{C})}(E,F)$$

est un isomorphisme de faisceaux sur $\mathcal{S}/X$.

Preuve. Pour tout $U \longrightarrow X$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{C}(U))}(E_U, F_U) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C}(U))}(E'^{\cdot}, F_U^{\cdot})$$

où la limite inductive est prise sur la catégorie des flèches $E'^{\cdot} \longrightarrow E_U^{\cdot}$ dans $K(\mathcal{C}(U))$ qui sont à cône acyclique ; la conclusion résulte alors de 2.2 appliqué à $P^{\cdot} = F^{\cdot} := E_U^{\cdot}$ et à $E^{\cdot} := E'^{\cdot}$.

DÉFINITION 2.3. Soit $E \in \mathrm{ob}\, D(\mathcal{C}(X))$, nous dirons que E est parfait (relativement à $\mathcal{C}_o$) si l'ensemble des $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ tels qu'il existe un morphisme

$$P^{\cdot} \longrightarrow E_U^{\cdot}$$

dans $C(C(U))$ à cône acyclique et avec $P^\cdot$ strictement parfait (relativement à C_o) est un raffinement de X dans $\mathcal{S}$.

Remarque 2.3.1. D'après 2.2.3, il revient au même d'exiger que E soit localement isomorphe dans $D(C)$ à un complexe strictement parfait.

Notations 2.3.2. Nous désignerons par $D_{parf}(C(X))$ la sous-catégorie strictement pleine (cf. 2.3.1) de $D(C(X))$ formée des objets parfaits (relativement à C_o). Nous poserons, pour $\alpha = +,-,b$

$$D^\alpha_{parf}(C(X)) = D^\alpha(C(X)) \cap D_{parf}(C(X)) .$$

PROPOSITION 2.3.3. La catégorie $D_{parf}(C(X))$ (resp. $D^\alpha_{parf}(C(X))$) est une sous-catégorie triangulée de $D(C(X))$ (resp. $D^\alpha(C(X))$ pour $\alpha = +,-,b$).

Preuve. Il est clair que $D_{parf}(C(X))$ est stable par translation des degrés. Il reste à voir que si

$$E \xrightarrow{u} F \longrightarrow G \longrightarrow G[1]$$

est un triangle distingué de $D(C(X))$ avec E et F parfaits, alors G est aussi parfait. Or, quitte à se localiser, on peut supposer que $E^\cdot$ et $F^\cdot$ sont des objets de $K^b(C_o(X))$ et quitte à se localiser davantage, on peut supposer que u provient d'une flèche $u^\cdot : E^\cdot \longrightarrow F$ de $K^b(C_o(X))$ (cf. 2.2.3). Alors G est isomorphe dans $D(C(X))$ au cône de $u^\cdot$ qui est strictement parfait, d'où la conclusion. Même démonstration pour l'assertion respée.

LEMME 2.4. Soit $E \in \text{ob } C(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $E[o] \in \text{ob } D_{parf}(C(X))$;

(ii) E admet localement une résolution à gauche de longueur finie par des objets de C_o, i.e. l'ensemble des $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ tels qu'il existe un complexe acyclique dans $C(U)$,

$$0 \longrightarrow L^{-n} \longrightarrow L^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^o \longrightarrow E_U \longrightarrow 0 ,$$

avec $L^i \in \text{ob } C_o(U)$ pour tout i, est un raffinement de X dans $\mathcal{S}$.

Preuve. Il est clair que (ii) $\Longrightarrow$ (i) car le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow L^{-n} \longrightarrow L^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^o \longrightarrow E_U \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

n'est autre que le cône de la flèche évidente $L^\cdot \longrightarrow E_U[o]$. Réciproquement, si $P^\cdot \longrightarrow E_U[o]$ est une flèche dans $C(C(U))$ à cône acycliq

et avec $P^\cdot$ strictement parfait, la flèche composée

$$\tau_{\leqslant 0} P^\cdot \longrightarrow P^\cdot \longrightarrow E_U[0]$$

est encore à cône acyclique ; de plus, quitte à se localiser sur U, $L^\cdot = \tau_{\leqslant 0} P^\cdot$ est encore strictement parfait : en effet, il suffit de montrer que $L^0 = \mathrm{Ker}(d_P^0)$ est localement dans C_0, ce qui résulte facilement de (2.0.2) ($P^\cdot$ est acyclique en tout degré > 0), d'où la conclusion.

DÉFINITION 2.4.1. Nous dirons que $E \in \mathrm{ob}\, C(X)$ est parfait s'il vérifie les conditions équivalentes de 2.4.

Nous noterons $C_{\mathrm{parf}}(X)$ la sous-catégorie strictement pleine de $C(X)$ formée des objets parfaits.

PROPOSITION 2.4.2. Soit $E \in \mathrm{ob}\, D(C(X))$ tel que $E^i = 0$ pour presque tout i. Si, pour tout i, E^i est parfait, alors E l'est aussi.

Preuve. Supposons que $E^i = 0$ pour $i \notin [a,b]$, fixons a et raisonnons par récurrence sur $b \geqslant a$. Pour $b = a$, l'assertion résulte aussitôt de la définition 2.4.1. Supposons l'assertion démontrée pour $b-1$ et prouvons la pour b : considérons le triangle distingué

$$E' \longrightarrow E^b[-b+1] \longrightarrow E[1] \longrightarrow E'[1]$$

où

$$E'^\cdot = [\cdots \longrightarrow E^{b-2} \longrightarrow E^{b-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots] .$$

Par hypothèse de récurrence E' est parfait et comme E^b est parfait, la conclusion résulte de 2.3.3.

2.5. Pour chaque $U \in \mathrm{ob}\, \mathcal{S}$, on dispose d'une sous-catégorie pleine abélienne $\mathcal{A}(U)$ de $D(C(U))$ et d'un foncteur cohomologique $H^0_\tau(U) : D(C(U)) \longrightarrow \mathcal{A}(U)$ (cf. 1.5.7). Les $\mathcal{A}(U)$ s'organisent en une sous-$\mathcal{S}$-catégorie fibrée $\mathcal{A}$ de $D(C)$, à fibres des catégories abéliennes et à foncteurs "image inverse" exacts et les foncteurs cohomologiques $H^0_\tau(U)$ s'organisent en un $\mathcal{S}$-foncteur $H^0_\tau : D(C) \longrightarrow \mathcal{A}$; de plus, C s'identifie à une sous-$\mathcal{S}$-catégorie fibrée de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 2.5.1. Soit $[K^{-1} \longrightarrow K^0]$ un objet de $\mathcal{A}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $[K^{-1} \longrightarrow K^{o}]$ est un objet de $D_{parf}(C(X))$;

(ii) l'ensemble des $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ tels que $[K_U^{-1} \longrightarrow K_U^{o}]$ soit isomorphe dans $\mathcal{K}(U)$ à $[L^{-1} \longrightarrow L^{o}] \in \mathrm{ob}\,\mathcal{K}(U)$ avec L^{-1} et L^{o} objets de $C_{parf}(U)$ est un raffinement de X dans $\mathcal{S}$;

(iii) l'ensemble des $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ tels qu'il existe $[L^{-1} \longrightarrow L^{o}] \in \mathrm{ob}\,\mathcal{K}(U)$ avec L^{-1} objet de $C_{parf}(U)$ et L^{o} objet de $C_{o}(U)$ et qu'il existe une flèche $[L^{-1} \longrightarrow L^{o}] \longrightarrow [K^{-1} \longrightarrow K^{o}]$ dans $C(C(U))$ qui induise un isomorphisme dans $\mathcal{K}(U)$ est un raffinement de X dans $\mathcal{S}$.

Preuve. On a trivialement (iii) $\Longrightarrow$ (ii) et (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte aussitôt de 2.4.2. Montrons (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $[K^{-1} \longrightarrow K^{o}]$ un objet de $\mathcal{K}(X)$ parfait en tant qu'objet de $D(C(X))$, localement sur X , il existe une flèche

$$P^{\cdot} \longrightarrow [K^{-1} \longrightarrow K^{o}]$$

dans $C(C)$ à cône acyclique et avec $P^{\cdot}$ strictement parfait ; alors la flèche canonique

$$H_T^{o}(P^{\cdot}) \longrightarrow [K^{-1} \longrightarrow K^{o}]$$

dans $C(C)$ induit un isomorphisme dans $\mathcal{K}$. Si $H_T^{o}(P^{\cdot}) = [L^{-1} \longrightarrow L^{o}]$, on a $L^{o} = \mathrm{Ker}(d_P^{o})$ et donc, d'après (2.0.2), L^{o} est localement dans C_o ($P^{\cdot}$ est acyclique en tout degré > 0) ; d'autre part, $L^{-1} = \mathrm{Coim}\, d_P^{-1}$ et donc L^{-1} admet une résolution à gauche de longueur finie par des objets de C_o , à savoir

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow \mathrm{Coim}\, d_P^{-1} \longrightarrow 0$$

($P^{\cdot}$ est acyclique en tout degré < -1), et L^{-1} est un objet parfait de C (cf. 2.4.1), d'où la conclusion.

DÉFINITION 2.5.2. Un objet de $\mathcal{K}(X)$ sera dit parfait s'il vérifie les conditions équivalentes de 2.5.1.

Nous noterons $\mathcal{K}_{parf}(X)$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{K}(X)$ formée des objets parfaits. On déduit aussitôt de 2.3.3 le lemme suivant :

LEMME 2.5.3. Si deux des trois objets d'une suite exacte courte de $\mathcal{K}(X)$ sont dans $\mathcal{K}_{parf}(X)$, il en est de même du troisième.

PROPOSITION 2.5.4. Soit $E \in \mathrm{ob}\, D(\mathcal{C}(X))$ tel que $H^i_\tau(E) = 0$ pour presque tout i. Si, pour tout i, $H^i_\tau(E)$ est parfait, alors E l'est aussi.

Preuve. Supposons que $H^i_\tau(E) = 0$ pour $i \notin [a,b]$ et montrons la proposition par récurrence sur $b \geqslant a$. Pour $b = a$, les deux flèches canoniques

$$ {}^\tau\!\rangle\!\rangle_b \, {}^\tau\!\langle\!\langle_b E \longleftarrow {}^\tau\!\langle\!\langle_b E \longrightarrow E $$

sont des isomorphismes dans $D(\mathcal{C}(X))$ et ${}^\tau\!\rangle\!\rangle_b \, {}^\tau\!\langle\!\langle_b E = H^b_\tau(E)[-b]$ est parfait, donc E aussi.

Supposons l'assertion démontrée pour $b-1$ et montrons la pour b. On a un triangle distingué

$$ {}^\tau\!\langle\!\langle_{b-1} E \longrightarrow E \longrightarrow {}^\tau\!\rangle\!\rangle_b E \longrightarrow ({}^\tau\!\langle\!\langle_{b-1} E)[1] \; ; $$

la flèche canonique

$$ H^b_\tau(E)[-b] = {}^\tau\!\rangle\!\rangle_b \, {}^\tau\!\langle\!\langle_b E \longrightarrow {}^\tau\!\rangle\!\rangle_b E $$

est un isomorphisme dans $D(\mathcal{C}(X))$, pour tout $i \langle\!\langle\, b-1$, la flèche canonique

$$ H^i_\tau({}^\tau\!\langle\!\langle_{b-1} E) \longrightarrow H^i_\tau(E) $$

est un isomorphisme dans $\mathcal{A}(X)$ et, pour tout $i \geqslant b$, $H^i_\tau({}^\tau\!\langle\!\langle_{b-1} E) = 0$. Par suite ${}^\tau\!\langle\!\langle_{b-1} E$ est parfait (hypothèse de récurrence) et, comme on suppose $H^b_\tau(E)$ parfait, la conclusion résulte de 2.3.3.

2.6. En général, $\mathcal{C}_{\mathrm{parf}}(X)$ n'est pas stable par noyau et coimages et E parfait n'implique pas que tous les $H^n_\tau(E)$ $(n \in \mathbb{Z})$ sont parfaits. Cependant, souvent dans la pratique et en tout cas dans les applications que nous avons en vue, la réciproque de 2.5.4 est vérifiée ; nous allons voir maintenant pourquoi.

Commençons par des définitions.

DEFINITION 2.6.1. Un objet E de $\mathcal{C}(X)$ sera dit de type fini (relativement à $\mathcal{C}_o$) si l'ensemble des $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{P}$ tels qu'il existe un épimorphisme strict $F \longrightarrow E_U$ dans $\mathcal{C}(U)$ avec $F \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}_o(U)$ est un raffinement de X dans $\mathcal{P}$.

Nous noterons $\mathcal{C}_{\mathrm{t.f.}}(X)$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{C}(X)$ formée des objets de type fini.

DÉFINITION 2.6.2. Un objet E de $\mathcal{C}(X)$ sera dit cohérent (relativement à $\mathcal{C}_o$) s'il est de type fini et si, pour tout $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ et toute flèche $F \xrightarrow{w} E_U$ dans $\mathcal{C}(U)$ avec $F \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}_o(U)$, $\mathrm{Ker}\, w$ est de type fini.

Nous noterons $\mathcal{C}_{coh}(X)$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{C}(X)$ formée des objets cohérents.

LEMME 2.6.3. (i) La sous-catégorie $\mathcal{C}_{coh}(X)$ de $\mathcal{C}(X)$ est stable par noyaux et coimages.

(ii) Pour toute suite exacte dans $\mathcal{C}(X)$,

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow 0\ ,$$

si deux des objets sont cohérents, il en est de même du troisième.

Preuve. Commençons par la stabilité par noyaux. Soit $v : E \longrightarrow E''$ une flèche dans $\mathcal{C}_{coh}(X)$ et soit $E' \xrightarrow{u} E$ son noyau ; pour tout $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ et tout $F \xrightarrow{w} E'_U$ dans $\mathcal{C}(U)$ avec $F \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}_o(U)$, on a clairement $\mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Ker}(uw)$, donc $\mathrm{Ker}(w)$ est de type fini puisque E est cohérent ; maintenant, quitte à se localiser sur X, on peut supposer qu'il existe un épimorphisme strict $F \xrightarrow{w} E'$ avec $F \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}_o(X)$, alors $\mathrm{Ker}(vw)$ est de type fini puisque E'' est cohérent ; or la flèche canonique $\mathrm{Ker}(vw) \longrightarrow E'$,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}(vw) & \hookrightarrow & F & \longrightarrow & E'' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \| \\ E' & \xhookrightarrow{u} & E & \xrightarrow{v} & E'' \end{array}$$

est un épimorphisme strict, donc E' est de type fini.

Montrons maintenant l'assertion (ii). Si E et E'' sont cohérents, on vient de voir que E' l'est aussi. Supposons E' et E cohérents, alors il est clair que E'' est de type fini ; si $U \longrightarrow X$ est dans $\mathcal{S}$ et si $F \xrightarrow{w} E''_U$ est une flèche dans $\mathcal{C}(U)$ avec $F \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}_o(U)$, quitte à se localiser sur U, on peut supposer que w se relève en une flèche $F \longrightarrow E_U$ (cf. (2.0.1)) ; d'autre part, quitte à se localiser de nouveau, on peut trouver un épimorphisme strict $G \longrightarrow E'_U$ avec $G \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}_o(U)$ (E' est de type fini) ; par suite on a construit un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G \oplus F & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{w}} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \\ 0 & \longrightarrow & E'_U & \longrightarrow & E_U & \longrightarrow & E''_U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les deux lignes sont exactes ; le noyau $\mathrm{Ker}(\tilde{w})$ est de type fini puisque E est cohérent ; enfin la flèche canonique $\mathrm{Ker}(\tilde{w}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(w)$ est un épimorphisme strict puisque $G \longrightarrow E'_U$ en est un (lemme du serpent dans $\mathcal{C}(U)$, cf. 1.0.3) ; donc $\mathrm{Ker}(w)$ est de type fini.

Remarquons alors que $\mathcal{C}_{coh}(X)$ est stable par coimage, puisque, pour toute flèche $u : E \longrightarrow F$ de $\mathcal{C}(X)$, on a une suite exacte (cf. (1.3.0))

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ u \longrightarrow E \longrightarrow \mathrm{Coim}\ u \longrightarrow 0 .$$

Achevons alors la preuve de (ii). Supposons E' et E'' cohérents ; alors, quitte à se localiser sur X, on peut supposer qu'il existe des épimorphismes stricts $F' \longrightarrow E'$, $F'' \longrightarrow E''$ dans $\mathcal{C}(X)$ avec F' et F'' dans $\mathcal{C}_o(X)$; quitte à se localiser de nouveau sur X, on peut relever $F'' \longrightarrow E''$ en $F'' \longrightarrow E$, d'où une flèche $F' \oplus F'' \longrightarrow E$ dont on vérifie aussitôt que c'est un épimorphisme strict (lemme du serpent) ; comme $F' \oplus F'' \in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}_o(X)$, E est de type fini ; soit maintenant $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{S}$ et soit $F \xrightarrow{w} E_U$ une flèche de $\mathcal{C}(U)$ avec $F \in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}_o(U)$; on a un diagramme commutatif, à lignes exactes,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(vw) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathrm{Coim}(vw) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle w'} & & \downarrow{\scriptstyle w} & \searrow^{vw} & \downarrow{\scriptstyle w''} & & \\
0 & \longrightarrow & E'_U & \xrightarrow{u} & E_U & \xrightarrow{v} & E''_U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de sorte que la flèche canonique $\mathrm{Ker}(w') \longrightarrow \mathrm{Ker}(w)$ est un isomorphisme ($\mathrm{Ker}(w'') = 0$ et on applique 1.0.3) ; il reste à voir que $\mathrm{Ker}(w')$ est de type fini et comme E' est cohérent, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(vw)$ est de type fini (voir la preuve de la stabilité par noyaux) ; mais $\mathrm{Ker}(vw)$ est bien de type fini (voir de nouveau la preuve de la stabilité par noyau), d'où la conclusion.

On a les inclusions évidentes

$$\mathcal{C}_{parf}(X) \subset \mathcal{C}_{t.f.}(X) \supset \mathcal{C}_{coh}(X)$$

mais en général, $\mathcal{C}_{parf}(X)$ et $\mathcal{C}_{coh}(X)$ sont deux sous-catégories distinctes de $\mathcal{C}_{t.f.}(X)$: on a bien $\mathcal{C}_o(X) \subset \mathcal{C}_{parf}(X)$, mais, en général, $\mathcal{C}_o(X)$ n'est pas contenue dans $\mathcal{C}_{coh}(X)$.

Faisons les deux hypothèses suivantes :

(2.6.4) Hypothèse noethérienne. Tout objet U de $\mathcal{S}$ est quasi-compact et tout objet de $\mathcal{C}_o(U)$ est cohérent (relativement à $\mathcal{C}_o$).

(2.6.5) Hypothèse d'amplitude parfaite finie. Il existe un entier $d = d(X) \geqslant 0$ ayant la propriété suivante : pour tout $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{G}$, pour tout $E \in \mathrm{ob}\, C(U)$ et pour toute résolution à gauche de E dans $C(U)$ de longueur d, i.e. pour tout complexe acyclique,

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L^{-d+1} \longrightarrow L^{-d+2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^{0} \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

telle que $L^n \in \mathrm{ob}\, C_o(U)$ pour $n = 0,\ldots,d-1$, l'ensemble des $V \longrightarrow U$ dans $\mathcal{G}$ pour lesquels K_V soit dans $C_o(V)$ est un raffinement de U dans $\mathcal{G}$.

PROPOSITION 2.6.6. Sous les hypothèses (2.6.4) et (2.6.5), on a $C_{parf}(X) = C_{coh}(X)$.

Preuve. Comme $C_o(X) \subset C_{coh}(X)$, l'inclusion $C_{parf}(X) \subset C_{coh}(X)$ résulte de 2.4 et 2.6.3.

Réciproquement, soit $E \in \mathrm{ob}\, C_{coh}(X)$; utilisant la définition de cohérent, on construit, pour tout entier $\ell \geqslant 0$, par récurrence sur ℓ, un recouvrement $\mathcal{U}_\ell$ de X et, pour chaque $U \longrightarrow X$ dans $\mathcal{U}_\ell$, une résolution à gauche de longueur ℓ de E_U dans $C(U)$,

$$0 \longrightarrow K_U \longrightarrow L_U^{-\ell+1} \longrightarrow L_U^{-\ell+2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_U^{0} \longrightarrow E_U \longrightarrow 0$$

avec $L_U^n \in \mathrm{ob}\, C_o(U)$, pour $n = 0,\ldots,\ell-1$; en particulier, pour $\ell = d$, on a $K_U \in \mathrm{ob}\, C_o(U)$ pour tout $U \in \mathcal{U}_d$ et E est parfait.

PROPOSITION 2.6.7. Sous les hypothèses (2.6.4) et (2.6.5), un objet E de $D(C(X))$ est parfait si et seulement si $H_\tau^n(E) \in \mathrm{ob}\, \mathcal{A}_{parf}(X)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $H_\tau^n(E) = 0$ pour presque tout $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve. La partie "si" a déjà été démontrée en 2.5.4. Il reste à vérifier la partie"seulement si".

Pour cela, quitte à se localiser par un recouvrement fini de X (X est supposé quasi-compact, cf. (2.6.4)), on peut supposer $E^\cdot$ strictement parfait ; alors $H_\tau^n(E^\cdot)$ est strictement parfait, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'après 2.6.3 (i), et $H_\tau^n(E^\cdot) = 0$ pour presque tout $n \in \mathbb{Z}$, d'où la conclusion.

PROPOSITION 2.6.8. Sous les hypothèses (2.6.4) et (2.6.5), $\mathcal{A}_{parf}(X)$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{A}(X)$, i.e. stable par noyaux, conoyaux, images et coimages.

Preuve. Il suffit de montrer la stabilité par noyaux et conoyaux (cf. 2.5.3) ; soit donc $[K^{-1} \longrightarrow K^0] \xrightarrow{u} [L^{-1} \longrightarrow L^0]$ une flèche dans $\mathcal{A}_{parf}(X)$, comme la question est locale sur X, on peut supposer K^{-1},

K^o , L^{-1} , L^o dans $\mathcal{C}_{parf}(X)$ et u induite par une flèche de complexes $u^\cdot$ (cf. 2.5.1 (iii)) ; soit $C^\cdot$ le cône de $u^\cdot$, on a un triangle dans $D(\mathcal{C}(X))$,

$$K^\cdot \longrightarrow L^\cdot \longrightarrow C^\cdot \longrightarrow K^\cdot[1]$$

et donc une suite exacte dans $\mathcal{A}(X)$

$$0 \longrightarrow H_\tau^{-1}(C^\cdot) \longrightarrow [K^{-1} \longrightarrow K^o] \xrightarrow{u^\cdot} [L^{-1} \longrightarrow L^o] \longrightarrow H_\tau^o(C^\cdot) \longrightarrow 0 ,$$

ce qui montre que $H_\tau^{-1}(C^\cdot)$ est un noyau de $u^\cdot$ et $H_\tau^o(C^\cdot)$ un conoyau de $u^\cdot$ dans $\mathcal{A}(X)$; la conclusion résulte alors de 2.6.7 ($C^\cdot$ est à composantes dans $\mathcal{C}_{parf}(X)$).

3. MODULES FILTRÉS SUR UN ANNEAU FILTRÉ.

3.0. Soit $(X,\mathcal{O})$ un espace commutativement annelé (voire un topos commutativement annelé).

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}$-Algèbre unitaire non nécessairement commutative, munie d'une filtration croissante, indexée par $\mathbb{Z}$,

$$(3.0.1) \qquad \cdots \subset \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{i+1} \subset \cdots \subset \mathcal{A} ,$$

par des sous-$\mathcal{O}$-bi-Modules, qui vérifie les propriétés suivantes

$$(3.0.2) \qquad \mathcal{A}_i = 0 \text{ pour } i < 0 , \ \mathcal{A}_0 = \mathcal{O} , \ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$$

$$(3.0.3) \qquad \mathcal{A}_i . \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j} \qquad (\forall i,j \in \mathbb{Z}).$$

DÉFINITION 3.1. Un $\mathcal{A}$-Module filtré est un $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathcal{M}$, muni d'une filtration croissante, indexée par $\mathbb{Z}$

$$(3.1.1) \qquad \cdots \subset \mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_{i+1} \subset \cdots \subset \mathcal{M}$$

par des sous-$\mathcal{O}$-Modules, qui vérifie les propriétés suivantes

$$(3.1.2) \qquad \mathcal{M}_i = 0 \text{ pour } i \ll 0 \text{ et } \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_i = \mathcal{M} ,$$

$$(3.1.3) \qquad \mathcal{A}_i . \mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_{i+j} \qquad (\forall i,j \in \mathbb{Z}).$$

On notera $MF(\mathcal{A})$ la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules filtrés et $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ un objet de cette catégorie.

Si $M(\mathcal{A})$ (resp. $M(\mathcal{O})$) désigne la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules à gauche (resp. $\mathcal{O}$-Modules), on a des foncteurs "$\mathcal{A}$-Module sous-jacent"

$$(3.1.4) \qquad MF(\mathcal{A}) \longrightarrow M(\mathcal{A}) , \ (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longmapsto \mathcal{M}$$

et "i-ième cran de la filtration" $(i \in \mathbb{Z})$

$$(3.1.5) \qquad MF(\mathcal{A}) \longrightarrow M(\mathcal{O}) , \ (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longmapsto \mathcal{M}_i .$$

On a aussi, pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, un foncteur "décalage de la filtration de n crans"

$$(3.1.6) \qquad MF(\mathcal{A}) \longrightarrow MF(\mathcal{A}), (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longmapsto (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)(n)$$

où $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)(n) = (\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$ avec $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_i = \mathcal{M}_{i+n}$; en particulier, pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, on posera

(3.1.7) $$\mathcal{A}(n) = (\mathcal{A},\mathcal{A}_i)(n) ,$$

$\mathcal{A}$ étant considéré comme $\mathcal{A}$-Module à gauche.

Exemple 3.1.8. Pour tout $\mathcal{O}$-Module plat $\mathcal{E}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on notera $\mathcal{A}(n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ l'objet $(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}, \mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E})(n)$ de $MF(\mathcal{A})$.

3.2. A la $\mathcal{O}$-Algèbre filtrée $(\mathcal{A},\mathcal{A}_i)$, on associe la $\mathcal{O}$-Algèbre graduée

(3.2.1) $$gr.\mathcal{A} = \bigoplus_{i \geqslant 0} gr_i \mathcal{A} \quad , \quad gr_i \mathcal{A} = \mathcal{A}_i / \mathcal{A}_{i-1} ;$$

on notera $gr\,\mathcal{A}$ la $\mathcal{O}$-Algèbre unitaire déduite de $gr.\mathcal{A}$ par oubli de la graduation.

DÉFINITION 3.2.2. Un gr.$\mathcal{A}$-Module gradué est un gr $\mathcal{A}$-Module à gauche $\mathcal{G}$, muni d'une graduation, indexée par $\mathbb{Z}$,

(3.2.2.0) $$\mathcal{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_i ,$$

par des sous-$\mathcal{O}$-Modules vérifiant les propriétés suivantes

(3.2.2.1) $$\mathcal{G}_i = 0 \text{ pour } i \ll 0 ,$$

(3.2.2.2) $$gr_i \mathcal{A} . \mathcal{G}_j \subset \mathcal{G}_{i+j} \quad (\forall i,j \in \mathbb{Z}) .$$

On notera $MG(gr.\mathcal{A})$ la catégorie des gr.$\mathcal{A}$-Modules gradués et $\mathcal{G}.$ un objet de cette catégorie.

Si $M(gr\,\mathcal{A})$ désigne la catégorie des gr $\mathcal{A}$-Modules à gauche, on a des foncteurs "gr $\mathcal{A}$-Module sous-jacent"

(3.2.3) $$MG(gr.\mathcal{A}) \longrightarrow M(gr\,\mathcal{A}) \quad , \quad \mathcal{G}. \longmapsto \mathcal{G}$$

et "i-ième composante"

(3.2.4) $$MG(gr.\mathcal{A}) \longrightarrow M(\mathcal{O}) \quad , \quad \mathcal{G}. \longmapsto \mathcal{G}_i .$$

A chaque objet $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ de $MF(\mathcal{A})$, on associe naturellement un objet $gr.\mathcal{M}$ de $MG(gr.\mathcal{A})$, à savoir

(3.2.5) $$gr.\mathcal{M} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} gr_i \mathcal{M} \quad , \quad gr_i \mathcal{M} = \mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i-1} ,$$

d'où un foncteur "gradué associé"

(3.2.6) $$gr. : MF(\mathcal{A}) \longrightarrow MG(gr.\mathcal{A}) ;$$

on notera $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ le $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$-Module déduit de $\mathrm{gr}.\mathcal{M}$ par oubli de la filtration, d'où un foncteur

$$\mathrm{gr} : \mathrm{MF}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}) \ . \tag{3.2.7}$$

3.3. La catégorie $\mathrm{MG}(\mathrm{gr}.\mathcal{D})$ est abélienne et les foncteurs (3.2.3), (3.2.4) sont exacts. Par contre, il n'en est pas de même, en général, de la catégorie $\mathrm{MF}(\mathcal{D}) : \mathrm{MF}(\mathcal{D})$ n'est à priori qu'une catégorie additive. Nous allons voir qu'il existe dans $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$ une bonne notion de suite exacte qui fait de $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$ une catégorie exacte vérifiant (1.3.0) et qui rend les foncteurs (3.1.4), (3.1.5), (3.2.6) et (3.2.7) exacts.

LEMME 3.3.1. Dans $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$, tout morphisme admet des noyau, coimage, image et conoyau.

Preuve. Soit $u : (\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$ une flèche de $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$.

Si $\mathcal{K} \xrightarrow{k} \mathcal{M}$ est un noyau de $\mathcal{M} \xrightarrow{u} \mathcal{N}$, munissons le $\mathcal{D}$-Module à gauche $\mathcal{K}$ de la filtration par les sous-$\mathcal{O}$-Modules $\mathcal{K}_i = k^{-1}(\mathcal{M}_i)$ alors $(\mathcal{K},\mathcal{K}_i) \xrightarrow{k} (\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ est un noyau de u dans $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$.

Si $\mathcal{M} \xrightarrow{c} \mathcal{C}$ est une coimage de $\mathcal{M} \xrightarrow{u} \mathcal{N}$, munissons le $\mathcal{D}$-Module à gauche $\mathcal{C}$ de la filtration par les sous-$\mathcal{O}$-Modules $\mathcal{C}_i = c(\mathcal{M}_i)$, alors $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \xrightarrow{c} (\mathcal{C},\mathcal{C}_i)$ est une coimage dans $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$.

Raisonnement dual pour les conoyau et image.

LEMME 3.3.2. Soit

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}',\mathcal{M}'_i) \xrightarrow{u} (\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \xrightarrow{v} (\mathcal{M}'',\mathcal{M}''_i) \longrightarrow 0$$

une suite de morphismes de $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) les suites de $\mathrm{M}(\mathcal{O})$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_i \xrightarrow{u} \mathcal{M}_i \xrightarrow{v} \mathcal{M}''_i \longrightarrow 0 \qquad (i \in \mathbb{Z}),$$

sont exactes ;

(ii) $vu = 0$ et les suites de $\mathrm{M}(\mathcal{O})$,

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}_i \mathcal{M}' \xrightarrow{\mathrm{gr}_i u} \mathrm{gr}_i \mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{gr}_i v} \mathrm{gr}_i \mathcal{M}'' \longrightarrow 0 \quad (i \in \mathbb{Z}),$$

sont toutes exactes ;

(ii)' $vu = 0$ et la suite de $\mathrm{M}(\mathrm{gr}\,\mathcal{D})$

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}\,\mathcal{M}' \xrightarrow{\mathrm{gr}\,u} \mathrm{gr}\,\mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{gr}\,v} \mathrm{gr}\,\mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

De plus, si ces conditions équivalentes sont remplies, la suite de $M(\mathcal{A})$

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

est aussi exacte.

LEMME 3.3.3. Pour tout morphisme

$$(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \xrightarrow{u} (\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$$

de $MF(\mathcal{A})$, les suites de $MF(\mathcal{A})$,

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} u \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longrightarrow \operatorname{Coim} u \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} u \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{N}_i) \longrightarrow \operatorname{Coker} u \longrightarrow 0$$

vérifient les conditions équivalentes de 3.3.2.

Le défaut "d'abélianité" de $MF(\mathcal{A})$ est le suivant : la flèche canonique de $MF(\mathcal{A})$,

$$\operatorname{Coim} u \longrightarrow \operatorname{Im} u$$

associée à un morphisme u de $MF(\mathcal{A})$ n'est pas toujours un isomorphisme.

Si $\mathcal{E}$ est la classe des suites de $MF(\mathcal{A})$,

(3.3.4) $$0 \longrightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{M}'_i) \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathcal{M}'', \mathcal{M}''_i) \longrightarrow 0$$

qui vérifient les conditions équivalentes de 3.3.2, on a une notion de monomorphisme strict (resp. d'épimorphisme strict, resp. de morphisme strict) relativement à $\mathcal{E}$ (cf. 1.0).

LEMME 3.3.5. Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \xrightarrow{u} (\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$ un morphisme de $MF(\mathcal{A})$.

3.3.5.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est un monomorphisme strict (resp. un épimorphisme strict) ;

(ii) tous les $\operatorname{gr}_i u$ $(i \in \mathbb{Z})$ sont des monomorphismes (resp. épimorphismes) dans $M(\mathcal{O})$;

(ii)' $\operatorname{gr} u$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme) dans $M(\operatorname{gr} \mathcal{A})$;

(iii) u est un monomorphisme (resp. épimorphisme) dans $M(\mathcal{A})$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_i = u^{-1}(\mathcal{N}_i)$ (resp. $\mathcal{N}_i = u(\mathcal{M}_i)$).

3.3.5.2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est un morphisme strict

(ii) la flèche canonique

$$\text{Coim } u \longrightarrow \text{Im } u$$

est un isomorphisme dans $MF(\mathcal{A})$;

(iii) les suites

$$0 \longrightarrow gr_i \text{ Ker } u \longrightarrow gr_i \mathcal{M} \longrightarrow gr_i \mathcal{N} \longrightarrow gr_i \text{ Coker } u \longrightarrow 0 \quad (i \in \mathbb{Z})$$

sont exactes dans $M(\mathcal{O})$;

(iii)' la suite

$$0 \longrightarrow gr \text{ Ker } u \longrightarrow gr \mathcal{M} \longrightarrow gr \mathcal{N} \longrightarrow gr \text{ Coker } u \longrightarrow 0$$

est exacte dans $M(gr\ \mathcal{A})$.

PROPOSITION 3.3.6. La catégorie $MF(\mathcal{A})$, munie de la classe $\mathcal{E}$ des suites (3.3.4) qui vérifient les conditions équivalentes de 3.3.2, est une catégorie exacte et les foncteurs (3.1.4), (3.1.5) et (3.2.7) sont exacts. De plus $MF(\mathcal{A})$ vérifie la condition (1.3.0).

Nous pouvons donc appliquer à $MF(\mathcal{A})$ les résultats du numéro 1. Nous poserons

$$\begin{aligned} &CF(\mathcal{A}) = C(MF(\mathcal{A})) \\ &CG(gr.\mathcal{A}) = C(MG(gr.\mathcal{A})) \\ &C(\mathcal{O}) = C(M(\mathcal{O})) \\ &C(\mathcal{A}) = C(M(\mathcal{A})) \\ &C(gr\ \mathcal{A}) = C(M(gr\ \mathcal{A})) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

et idem pour les catégories $K^{\alpha}(-)$, $K^{\alpha,\phi}(-)$, $D(-)$ et $D^{\alpha}(-)$ $(\alpha = \infty, -, +$

Les foncteurs exacts (3.1.4), (3.1.5), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.6) e (3.2.7) se dérivent trivialement (cf. 1.6.2).

On retiendra en particulier les résultats suivants :

LEMME 3.3.8. Soit $(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{M}_i^{\cdot})$ un complexe de $MF(\mathcal{A})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{M}_i^{\cdot})$ est acyclique en degré n et la flèche canonique

$$gr.\text{Ker } d^n \longrightarrow \text{Ker } gr.d^n$$

est un isomorphisme dans $MG(gr.\mathcal{A})$;

(ii) $gr.\mathcal{M}^\cdot$ est acyclique en degré n et la flèche canonique

$$gr.Coim\ d^{n-1} \longrightarrow Coim\ gr.d^{n-1}$$

est un isomorphisme dans $MG(gr.\mathcal{A})$.

Preuve. On a la factorisation suivante de $gr.d^{n-1}$

$$gr.\mathcal{M}^{n-1} \twoheadrightarrow gr.Coim\ d^{n-1} \twoheadrightarrow Coim\ gr.d^{n-1} \hookrightarrow gr.Ker\ d^n \hookrightarrow Ker\ gr.d^n \hookrightarrow gr.\mathcal{M}^n$$

et dire que $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ (resp. $gr.\mathcal{M}^\cdot$) est acyclique en degré n, c'est dire que la flèche canonique

$$gr.Coim\ d^{n-1} \longrightarrow gr.Ker\ d^n$$

$$(resp.\ Coim\ gr.d^{n-1} \longrightarrow Ker\ gr.d^n)$$

est un isomorphisme, d'où le lemme.

COROLLAIRE 3.3.9. Soit $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) \in ob\ CF(\mathcal{A})$. On a les implications suivantes

(i) si $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ est acyclique, $gr.\mathcal{M}^\cdot$ est acyclique

(ii) si $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ est borné inférieurement et si $gr.\mathcal{M}^\cdot$ est acyclique, $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ est acyclique.

Preuve. Si $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ est acyclique, les différentielles de ce complexe sont toutes des morphismes stricts (cf. 1.2.2) et $gr.Ker\ d^n \longrightarrow Ker\ gr.d^n$ est un isomorphisme pour tout n (cf. 3.3.5 (iii)), d'où (i) (cf. 3.3.8).

Pour (ii), on remarque que la flèche canonique

$$gr.Coim\ d^n \twoheadrightarrow Coim\ gr.d^n$$

est un isomorphisme dans $MG(gr.\mathcal{A})$ si et seulement si la flèche canonique

$$gr.Ker\ d^n \hookrightarrow Ker\ gr.d^n$$

en est un ; l'assertion résulte donc de 3.3.8 par récurrence sur n, à partir de n_o avec $\mathcal{M}^n = 0$ si $n < n_o$.

3.4. Nous noterons $AF(\mathcal{A})$ la sous-catégorie abélienne pleine de $DF(\mathcal{A})$, $\mathcal{H}$, associée à la catégorie exacte $C = MF(\mathcal{A})$, vérifiant (1.3.0) (cf. 1.5.7).

Rappelons que les objets de $AF(\mathcal{A})$ sont les complexes dans $MF(\mathcal{A})$ de longueur 1

$$(3.4.1) \qquad [(M^{-1}, M_i^{-1}) \xrightarrow{d} (M^0, M_i^0)]$$

où d est un monomorphisme (non nécessairement strict) dans $MF(\mathcal{A})$ (i.e. où $d : M^{-1} \longrightarrow M^0$ est un monomorphisme dans $M(\mathcal{A})$).

Rappelons aussi que le foncteur

$$(3.4.2) \qquad MF(\mathcal{A}) \longrightarrow AF(\mathcal{A}) \quad , \quad (M, M_i) \longmapsto [0 \longrightarrow (M, M_i)]$$

identifie $MF(\mathcal{A})$ à une sous-catégorie pleine et exacte de $AF(\mathcal{A})$ et qu'un objet (3.4.1) de $AF(\mathcal{A})$ est isomorphe à un objet de $MF(\mathcal{A})$ si et seulement si d est un monomorphisme strict (un objet de $MF(\mathcal{A})$ correspondant étant un conoyau de d).

3.5. Soit $(M^\cdot, M_i^\cdot)$ un objet de $CF(\mathcal{A})$; pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, les deux objets suivants de $MF(\mathcal{A})$

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(d^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^n))$$

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(d^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Coim}(d^n))$$

sont bien définis (cf. 3.3.1) et on vérifie facilement qu'ils sont canoniquement isomorphes ; on les notera encore

$$(3.5.1) \qquad H^n(M^\cdot, M_i^\cdot) = (H^n(M^\cdot), H^n(M^\cdot)_i) \ ,$$

le $\mathcal{A}$-Module sous-jacent étant $H^n(M^\cdot)$; on a défini en fait, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, un foncteur

$$(3.5.2) \qquad H^n : CF(\mathcal{A}) \longrightarrow MF(\mathcal{A})$$

LEMME 3.5.3. *Pour chaque* $n \in \mathbb{Z}$, *on a* :

(i) H^n *induit des foncteurs, notés encore* H^n, *de* $KF(\mathcal{A})$, *de* $DF(\mathcal{A})$ *et de* $AF(\mathcal{A})$ *dans* $MF(\mathcal{A})$;

(ii) $H^n = H^0 \circ H^n_\tau$.

Preuve. Pour $(M^\cdot, M_i^\cdot) \in \mathrm{ob}\, CF(\mathcal{A})$, on a encore

$$H^n(M^\cdot, M_i^\cdot) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Coim}\, d^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d^n)$$

puisque $\mathrm{Coim}\, d^{n-1}$ et $\mathrm{Im}\, d^{n-1}$ ont même $\mathcal{A}$-Module sous-jacent ; le lemme découle essentiellement de cette remarque.

Remarque 3.5.4. (i) Pour $n \neq 0$, $H^n : AF(\mathcal{D}) \longrightarrow MF(\mathcal{D})$ est identiquement nul.

(ii) H^0 n'est pas en général un foncteur cohomologique.

A chaque $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) \in \text{ob } CF(\mathcal{D})$, on attache une suite spectrale de $\mathcal{O}$-Modules

$$(3.5.5) \qquad ((E_r^{pq}, d_r^{pq})_{r \geqslant 0}, E_\infty^{pq})$$

avec $$E_o^{pq} = gr_{-p} \mathcal{M}^{p+q} \quad , \quad d_o^{pq} = gr_{-p} d^{p+q}$$

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(gr_{-p} \mathcal{M}^\cdot), \ldots$$

et ----------

$$E_\infty^{pq} = gr_{-p} H^{p+q}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) \ .$$

LEMME 3.5.6. Soient $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) \in \text{ob } CF(\mathcal{D})$ et $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors il existe $r(p,q) \geqslant 0$ tel que

(i) $d_r^{pq} = 0$ pour tout $r > r(p,q)$

(ii) $E_\infty^{pq} = \varinjlim_{r > r(p,q)} E_r^{pq}$, les flèches de transitions étant toutes des épimorphismes.

Preuve. On a par hypothèse $\mathcal{M}_i^{p+q+1} = 0$ pour $i \ll 0$ et $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_i^{p+q} = \mathcal{M}^{p+q}$, donc si $\mathcal{M}_i^{p+q+1} = 0$ pour $i < i_o$, $r(p,q) = -i_o - p$ répond à la question.

Remarque 3.5.7. En général, $d_r \neq 0$ pour tout $r \geqslant 0$ (la suite spectrale ne dégénère en aucun E_r).

Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, posons

$$(3.5.8) \qquad E_r^n = \bigoplus_{p+q=n} E_r^{pq} \ ;$$

E_r^n est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}$-Module gradué par le degré $i = -p$; si $r < \infty$,

$$(3.5.9) \qquad d_r^n = \bigoplus_{p+q=n} d_r^{pq} : E_r^n \longrightarrow E_r^{n+1}(-r)$$

est une flèche de $\mathcal{O}$-Module gradué et on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}$-Modules gradués

$$(3.5.10) \qquad E_{r+1}^n = H(E_r^{n-1}(r) \xrightarrow{d_r^{n-1}(r)} E_r^n \xrightarrow{d_r^n} E_r^{n+1}(-r))$$

$$= \text{Ker}(d_r^n)/\text{Im}(d_r^{n-1}(r)) \ .$$

LEMME 3.5.11. Chaque E_r^n admet une structure naturelle de gr.$\mathcal{D}$-Module gradué, qui prolonge la structure de $\mathcal{O}$-Module gradué ci-dessus et telle que :

(i) si $r < \infty$, $d_r^n : E_r^n \longrightarrow E_r^{n+1}(-r)$ est une flèche de gr.$\mathcal{D}$-Modules gradués

(ii) pour $r = 0$, le complexe de gr.$\mathcal{D}$-Modules gradués $(E_0^\cdot, d_0^\cdot)$ n'est autre que gr.$\mathcal{M}^\cdot$

(iii) si $r < \infty$, l'isomorphisme canonique (3.5.10) est un isomorphisme de gr.$\mathcal{D}$-Modules gradués.

Preuve. Par définition de E_r^n , on a

$$E_r^n = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\mathcal{M}_i^n \cap d^{-1}(\mathcal{M}_{i-r}^{n+1})}{\mathcal{M}_i^n \cap d^{-1}(\mathcal{M}_{i-r}^{n+1}) \cap (\mathcal{M}_{i-1}^n + d(\mathcal{M}_{i+r-1}^{n-1}))}$$

et si $r < \infty$, d_r^n en degré i est induite par

$$d : \mathcal{M}_i^n \cap d^{-1}(\mathcal{M}_{i-r}^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{M}_{i-r}^{n+1} \cap d^{-1}(\mathcal{M}_{i-2r}^{n+1}) ,$$

d désignant la différentielle de $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$; il est clair sur ces formules que la structure de complexe de $\mathcal{D}$-Modules de $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ induit la structure de gr.$\mathcal{D}$-Module cherchée sur chaque E_r^n .

Remarque 3.5.12. La suite spectrale $((E_r^{pq}, d_r^{pq})_{r \geqslant 0}, E_\infty^{pq})$ dépend fonctoriellement de $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ dans $CF(\mathcal{D})$, chaque E_r^n (resp. d_r^n) étant un foncteur de $CF(\mathcal{D})$ à valeurs dans $MG(gr.\mathcal{D})$ (resp. la catégorie des flèches de $MG(gr.\mathcal{D})$). A partir de $r = 1$, ces foncteurs passent au quotient en des foncteurs définis sur $D^-F(\mathcal{D})$ (cf. 3.3.9 (i)).

LEMME 3.5.13. Soit $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) = [(\mathcal{M}^{-1}, \mathcal{M}_i^{-1}) \xrightarrow{d} (\mathcal{M}^0, \mathcal{M}_i^0)]$ un objet de $AF(\mathcal{D})$; la suite spectrale correspondante vérifie les propriétés suivantes :

(i) $E_r^n = 0$ pour tout $r \geqslant 1$ et tout $n \neq -1$ et 0 ;

(ii) $d_r^n = 0$ pour tout $1 \leqslant r < \infty$ et tout $n \neq -1$;

(iii) pour tout $1 \leqslant r < \infty$, on a une suite exacte dans $MG(gr.\mathcal{D})$,

$$0 \longrightarrow E_{r+1}^{-1} \xrightarrow{\alpha_r^{-1}} E_r^{-1} \xrightarrow{d_r^{-1}} E_r^0(-r) \xrightarrow{\alpha_r^0(-r)} E_{r+1}^0(-r) \longrightarrow 0 ;$$

(iv) $0 = E_\infty^{-1} = \varprojlim_{r \geqslant 1} (E_r^{-1}, \alpha_r^{-1})$ dans $MG(gr.\mathcal{D})$;

(v) $gr.H^0(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) = E_\infty^0 = \varinjlim_{r \geqslant 1} (E_r^0, \alpha_r^0)$ dans $MG(gr.\mathcal{D})$.

Preuve. (i), (ii) et (iii) sont clairs (cf. 3.5.11 (iii)). On vérifie (iv) et (v) en degré i ; on a

$$0 = E^{-1}_{\infty,i} = \frac{\mathcal{M}_i^{-1} \cap \operatorname{Ker} d}{\mathcal{M}_{i-1}^{-1} \cap \operatorname{Ker} d} \hookrightarrow \frac{\mathcal{M}_i^{-1} \cap d^{-1}(\mathcal{M}^{\circ}_{i-r})}{\mathcal{M}_{i-1}^{-1} \cap d^{-1}(\mathcal{M}^{\circ}_{i-r})} = E^{-1}_{r,i}$$

et $\mathcal{M}^{-1}_{i-r} = 0$ pour $r \gg 0$, d'où (iv) ; on a

$$E^{\circ}_{r,i} = \frac{\mathcal{M}^{\circ}_i}{\mathcal{M}^{\circ}_i \cap (\mathcal{M}^{\circ}_{i-1} + d(\mathcal{M}^{-1}_{i+r-1}))} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{M}^{\circ}_i}{\mathcal{M}^{\circ}_i \cap (\mathcal{M}^{\circ}_{i-1} + \operatorname{Im} d)} = E^{\circ}_{\infty,i}$$

et $\bigcup_{r \geqslant 1} \mathcal{M}^{-1}_{i+r-1} = \mathcal{M}^{-1}$, d'où (v) (cf. aussi 3.5.6).

3.6. Nous supposerons ici que X est un schéma d'anneau structural $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ et que $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_i)$ est une $\mathcal{O}$-Algèbre filtrée quasi-cohérente au sens suivant :

(3.6.1) pour tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec}(A)$ de X , pour tout $f \in A$, si on note S_f l'ensemble multiplicatif des f^n $(n \geqslant 0)$ et U_f l'ouvert $\operatorname{Spec}(S_f^{-1} A)$ de U , on a

$$\Gamma(U_f, \mathcal{D}) = S_f^{-1}.\Gamma(U, \mathcal{D}) = \Gamma(U, \mathcal{D}).S_f^{-1}$$

et

$$\Gamma(U_f, \mathcal{D}_i) = S_f^{-1}.\Gamma(U, \mathcal{D}_i) = \Gamma(U, \mathcal{D}_i).S_f^{-1}$$

pour tout $i \geqslant 0$.

Cela revient à dire que $\mathcal{D}$ et chaque $\mathcal{D}_i$ $(i \geqslant 0)$ sont des $\mathcal{O}$-Modules à gauche et à droite quasi-cohérents.

Alors $\operatorname{gr} \mathcal{D}$ et chaque $\operatorname{gr} \mathcal{D}_i$ $(i \geqslant 0)$ sont des $\mathcal{O}$-Modules à gauche et à droite quasi-cohérents.

DÉFINITION 3.6.2. Un objet $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ (resp. $\mathcal{G}.$) de $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$ (resp. $\mathrm{MG}(\operatorname{gr}.\mathcal{D})$) sera dit quasi-cohérent si chaque $\mathcal{M}_i$ (resp. $\mathcal{G}_i$) $(i \in \mathbb{Z})$ est un $\mathcal{O}$-Module quasi-cohérent.

On notera $\mathrm{MF}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D})$ (resp. $\mathrm{MG}_{\mathrm{qcoh}}(\operatorname{gr}.\mathcal{D})$) la sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{MF}(\mathcal{D})$ (resp. $\mathrm{MG}(\operatorname{gr}.\mathcal{D})$) formée des objets quasi-cohérents.

Remarques 3.6.2.1. $\mathcal{G}. \in \operatorname{ob} \mathrm{MG}_{\mathrm{qcoh}}(\operatorname{gr}.\mathcal{D})$ si et seulement si $\mathcal{G}$ est un $\operatorname{gr} \mathcal{D}$-Module (ou un $\mathcal{O}$-Module) quasi-cohérent (cf. [17] 2.2.2 et 2.2.4).

3.6.2.2. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \in \operatorname{ob} \mathrm{MF}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D})$ si et seulement si $\operatorname{gr}.\mathcal{M}$ est quasi-cohérent (cf. [17] 2.2.2).

3.6.2.3. Si $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-Module quasi-cohérent (cf. [17] 2.2.2 et 2.2.4).

Les foncteurs (3.1.4), (3.1.5), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.6) et (3.2.7) transforment donc objets quasi-cohérents en objets quasi-cohérents.

La catégorie $MF_{qcoh}(\mathcal{A})$ (resp. $MG_{qcoh}(gr.\mathcal{A})$) est une sous-catégorie exacte (resp. abélienne), stable par extension de $MF(\mathcal{A})$ (resp. $MG(gr.\mathcal{A})$) (cf. [17] 2.2.2) et tous les résultats du numéro 3 valent sans modifications si on se restreint aux objets quasi-cohérents. On notera $CF_{qcoh}(\mathcal{A})$, $KF_{qcoh}(\mathcal{A})$, $DF_{qcoh}(\mathcal{A}),\ldots$ (resp. $CG_{qcoh}(gr.\mathcal{A})$, $KG_{qcoh}(gr.\mathcal{A})$, $DG_{qcoh}(gr.\mathcal{A}),\ldots$) pour $C(\mathcal{C})$, $K(\mathcal{C})$, $D(\mathcal{C}),\ldots$, où $\mathcal{C} = MF_{qcoh}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{C} = MG_{qcoh}(gr.\mathcal{A})$). On adoptera aussi des notations analogues pour les catégories de $\mathcal{O}$-Modules ou de gr $\mathcal{A}$-Modules quasi-cohérents (on fera attention que ce que nous appelons $D_{qcoh}(\mathcal{O})$ est $D(M_{qcoh}(\mathcal{O}))$ et non la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{O})$ formée des complexes à cohomologie cohérente ; cette distinction est d'ailleurs peu importante dans la pratique, cf. [16] II 3.7).

4. COMPLEXES PARFAITS DE MODULES FILTRÉS SUR L'ANNEAU FILTRÉ DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS.

4.0. Soit k un corps de caractéristique 0 et soit X un schéma séparé, de type fini et lisse sur k. On notera $\mathscr{O} = \mathscr{O}_X$ l'Anneau structural de X et $\mathscr{D} = \mathscr{D}_X$ l'Anneau des opérateurs différentiels linéaires sur X relativement à k (cf. [3] et [18] 16.11).

$\mathscr{D}$ est muni d'une filtration croissante

$$(4.0.1) \qquad 0 = \cdots = \mathscr{D}_{-1} \subset \mathscr{O} = \mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{D}$$

par l'ordre des opérateurs différentiels ; cette filtration vérifie (3.0.2) et (3.0.3) ; chaque $\mathscr{D}_i$ $(i \geqslant 0)$ est un $\mathscr{O}$-Module localement libre de type fini à gauche et à droite et $(\mathscr{D}, \mathscr{D}_i)$ est une $\mathscr{O}$-Algèbre filtrée quasi-cohérente au sens de (3.6.1).

Si $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{X/k}$ désigne le $\mathscr{O}$-Module localement libre de type fini des champs de vecteurs sur X, dual de $\Omega^1_{X/k}$, on a canoniquement

$$(4.0.2) \qquad \mathrm{gr}_1 \mathscr{D} = \mathscr{T} .$$

Par suite, si

$$(4.0.3) \qquad \pi : T^*X = \mathbb{V}(\mathscr{T}) \longrightarrow X$$

est le fibré cotangent de X/k, on a canoniquement

$$(4.0.4) \qquad \pi_* \mathscr{O}_{T^*X} = \mathrm{Sym}_{\mathscr{O}}(\mathscr{T}) = \mathrm{gr}\, \mathscr{D}$$

en tant que $\mathscr{O}$-Algèbres $(\mathrm{gr}.\mathscr{D} = \mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathscr{O}}(\mathscr{T}))$; $\mathrm{gr}\, \mathscr{D}$ est donc une $\mathscr{O}$-Algèbre commutative et quasi-cohérente, chaque $\mathrm{gr}_i \mathscr{D}$ étant localement libre de type fini sur $\mathscr{O}$.

Comme π est affine les foncteurs (cf. 3.6)

$$(4.0.5) \qquad \begin{aligned} &\pi_* : \mathrm{M}_{\mathrm{qcoh}}(\mathscr{O}_{T^*X}) \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{qcoh}}(\mathrm{gr}\, \mathscr{D}) \\ &\pi_* : \mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{qcoh}}(\mathscr{O}_{T^*X}) \longrightarrow \mathrm{D}^{\alpha}_{\mathrm{qcoh}}(\mathrm{gr}\, \mathscr{D}) \quad (\alpha = \infty, -, +, \mathrm{b}) \end{aligned}$$

sont des équivalences de catégories (cf. [17] 9.2.5) dont on notera $(-)^{\sim}$ des foncteurs quasi-inverses ; ces foncteurs induisent des équivalences de catégories entre les sous-catégories pleines formées des objets parfaits ([17] 9.2.6).

On notera encore

$$\text{(4.0.6)} \qquad \begin{aligned} \widetilde{gr} &: MF_{qcoh}(\mathscr{D}) \longrightarrow M_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X}) \\ \widetilde{gr} &: D^{\alpha}F_{qcoh}(\mathscr{D}) \longrightarrow D^{\alpha}_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X}) \quad (\alpha = \infty, -, +, b) \end{aligned}$$

les foncteurs composés $(-)^{\sim} \circ gr$.

Vu nos hypothèses sur X , X et T^*X sont des schémas noethériens et on a les propriétés de cohérence suivantes (cf. [3] Ch. 2, §9) :

PROPOSITION 4.0.7. (i) Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, $gr_i \mathscr{D}$ est un $\mathcal{O}$-Module cohérent et $\mathscr{D}_i$ est un $\mathcal{O}$-Module cohérent à gauche et à droite.

(ii) L'Anneau $gr \mathscr{D}$ est cohérent (sur lui-même) ; pour qu'un $gr \mathscr{D}$-Module quasi-cohérent soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit de type fini sur $gr \mathscr{D}$; s'il en est ainsi, tout sous-$gr \mathscr{D}$-Module ou tout $gr \mathscr{D}$-Module quotient de $\mathcal{G}$ qui est quasi-cohérent est aussi cohérent.

(iii) L'Anneau $\mathscr{D}$ est cohérent à gauche et à droite (sur lui-même) ; pour qu'un $\mathscr{D}$-Module à gauche $\mathscr{M}$ quasi-cohérent soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit de type fini sur $\mathscr{D}$; s'il en est ainsi, tout sous-$\mathscr{D}$-Module ou tout $\mathscr{D}$-Module quotient de $\mathscr{M}$ qui est quasi-cohérent est aussi cohérent.

Remarque 4.0.7.1. Un $gr \mathscr{D}$-Module (resp. $\mathscr{D}$-Module à gauche) est quasi-cohérent si et seulement si le $\mathcal{O}$-Module sous-jacent est quasi-cohérent (cf. [17] 2.2.4).

Vu la lissité de X sur k , X et T^*X sont des schémas réguliers donc de dimension cohomologique $\dim_k X$ et $2 \dim_k X$ respectivement. On en déduit le résultat suivant (cf. [3] Ch. 3, 1.2) :

PROPOSITION 4.0.8. (i) L'Anneau $gr \mathscr{D}$ est de dimension cohomologique égale à $2 \dim_k X$.

(ii) L'Anneau $\mathscr{D}$ est de dimension cohomologique à gauche et à droite majorée par $2 \dim_k X$.

Remarque 4.0.8.1. En fait $\mathscr{D}$ est de dimension cohomologique $\dim_k X$ (cf. [3] Ch. 3, 1.2), mais ce résultat, plus difficile à démontrer, ne nous servira pas.

4.1. Soit $\mathcal{S}$ le site zariskien de X et soit $\mathcal{C}$ la $\mathcal{S}$-catégorie fibrée dont la fibre en $U \subset X$ est $MF_{qcoh}(\mathscr{D}_U)$; nous allons définir une sous-$\mathcal{S}$-catégorie fibrée $\mathcal{C}_o$ de $\mathcal{C}$ vérifiant les hypothèses de 2.0.

DÉFINITION 4.1.1. (i) On appellera objet libre de type fini de $MF(\mathcal{O})$, ou encore $\mathcal{O}$-Module filtré libre de type fini, tout objet de $MF(\mathcal{O})$ isomorphe à

$$\bigoplus_{\alpha=1}^{r} \mathcal{O}(-j_\alpha)$$

pour un certain entier $r \geqslant 0$, appelé le rang de l'objet en question, et pour une certaine famille d'entiers $(j_\alpha)_{\alpha=1,\dots,r}$.

(ii) On appellera, par abus de langage, objet projectif de type fini de $MF(\mathcal{O})$ ou encore $\mathcal{O}$-Module filtré projectif de type fini, tout objet de $MF(\mathcal{O})$ qui est localement facteur direct d'un objet libre de type fini de $MF(\mathcal{O})$.

On notera $MF_o(\mathcal{O})$ la sous-catégorie additive strictement pleine de $MF(\mathcal{O})$ dont les objets sont les $\mathcal{O}$-Modules filtrés projectifs de type fini.

On prendra alors pour $\mathcal{C}_o$ la sous-$\mathcal{P}$-catégorie fibrée de $\mathcal{C}$ dont la fibre en $U \subset X$ est $\mathcal{C}_o(U) = MF_o(\mathcal{O}_U)$.

LEMME 4.1.2. $\mathcal{C}_o$ est localement relevable dans $\mathcal{C}$ et localement stable par noyau d'épimorphismes stricts (cf. (2.0.1) et (2.0.2)).

Preuve. Il suffit de montrer l'assertion suivante : tout épimorphisme strict dans $MF(\mathcal{O})$, de but un objet libre de type fini, admet localement une section. Soit donc

$$(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \xrightarrow{u} \bigoplus_{\alpha=1}^{r} \mathcal{O}(-j_\alpha)$$

un tel épimorphisme strict ; quitte à se localiser sur X, on peut trouver des sections m_α de $\mathcal{M}_{j_\alpha}$ avec $u(m_\alpha) = e_\alpha$ $(\alpha = 1,\dots,r)$, où $\{e_1,\dots,e_r\}$ est la base canonique de l'objet libre but de u (cf. 3.3.5) ; il reste à définir une section v de u dans $MF(\mathcal{O})$ en posant $v(e_\alpha) = m_\alpha$.

On peut donc appliquer au triplet $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_o)$ les résultats de 2.1 à 2.6.3 inclus ; on notera $MF_{parf}(\mathcal{O})$, $AF_{parf}(\mathcal{O})$, $D^\alpha F_{parf}(\mathcal{O})$ et $MF_{coh}(\mathcal{O})$ les catégories $\mathcal{C}_{parf}(X)$, $\mathcal{A}_{parf}(X)$, $D^\alpha_{parf}(\mathcal{C}(X))$ et $\mathcal{C}_{coh}(X)$ définies dans ces numéros.

4.2. Nous allons montrer maintenant que le triplet $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_o)$ vérifie les hypothèses (2.6.4) et (2.6.5).

LEMME 4.2.1. Un objet $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ de $MF(\mathcal{O})$ est projectif de type fini si et seulement si le gr $\mathcal{O}$-Module gr $\mathcal{M}$ est projectif de type fini.

Preuve. Si $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ est projectif de type fini, quitte à se localiser sur X, on peut supposer que $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ est facteur direct d'un $\mathcal{D}$-Module filtré libre de type fini ; mais alors $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ est facteur direct du gradué de ce $\mathcal{D}$-Module, i.e. d'un $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$-Module libre de type fini, et $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ est projectif de type fini.

Inversement, supposons que $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ est projectif de type fini ; quitte à se localiser sur X, on peut supposer qu'il existe un épimorphisme de $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$-Modules

$$(\mathrm{gr}\,\mathcal{D})^r \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{gr}\,\mathcal{M} ;$$

notons $(\bar{e}_\alpha)_{\alpha=1,\dots,r}$ la base canonique de $(\mathrm{gr}\,\mathcal{D})^r$, quitte à décomposer $\bar{u}(\bar{e}_\alpha)$ en composantes homogènes et à changer r et $\bar{u}$ pour que les nouveaux $\bar{u}(\bar{e}_\alpha)$ soient les composantes homogènes des anciens $\bar{u}(\bar{e}_\alpha)$, on peut supposer que $\bar{u}$ provient par oubli des graduations d'un épimorphisme de $MG(\mathrm{gr}.\mathcal{D})$

$$\mathcal{G}. = \bigoplus_{\alpha=1}^{r} \mathrm{gr}.\mathcal{D}(-j_\alpha) \xrightarrow{\bar{u}.} \mathrm{gr}.\mathcal{M} ;$$

d'autre part, $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ étant projectif, il existe, quitte à se localiser de nouveau sur X, une section σ de $\bar{u}$; définissons alors

$$s. : \mathrm{gr}.\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{G}.$$

en posant

$$s_i = \mathrm{pr}_i \circ (\sigma | \mathrm{gr}_i \mathcal{M}) : \mathrm{gr}_i \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{G}_i$$

où $\mathrm{pr}_i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_i$ est le i-ième projecteur canonique ; alors $s.$ est une section de $\bar{u}.$ dans $MG(\mathrm{gr}.\mathcal{D})$; quitte à se localiser de nouveau sur X, on peut supposer que, pour chaque $\alpha = 1,\dots,r$, il existe une section m_α de $\mathcal{M}_{j_\alpha}$, d'image $\bar{m}_\alpha$ dans $\mathrm{gr}_{j_\alpha}\mathcal{M}$, telle que $\bar{m}_\alpha = \bar{u}_{j_\alpha}(\bar{e}_\alpha)$ $(\alpha = 1,\dots,r)$; on définit un relèvement

$$u : \bigoplus_{\alpha=1}^{r} \mathcal{D}(-j_\alpha) \longrightarrow (\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$$

de $\bar{u}.$ dans $MF(\mathcal{D})$ en envoyant la base canonique $(e_\alpha)_{\alpha=1,\dots,r}$ de $\bigoplus_{\alpha=1}^{r} \mathcal{D}(-j_\alpha)$ sur $(m_\alpha)_{\alpha=1,\dots,r}$; soit $(\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$ un noyau de u dans $MF(\mathcal{D})$, alors $\mathrm{gr}.\mathcal{N}$ est un noyau de $\bar{u}.$ dans $MG(\mathrm{gr}.\mathcal{D})$ et $s.$ induit une rétraction

$$\bar{v}. : \mathcal{G}. \longrightarrow \mathrm{gr}.\mathcal{N}$$

de la flèche canonique $gr.\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{G}.$ dans $MG(gr.\mathcal{S})$; quitte à se localiser encore une fois sur X, on peut relever $\bar{v}.$ en une flèche

$$v : \bigoplus_{\alpha=1}^{r} \mathcal{S}(-j_\alpha) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$$

dans $MF(\mathcal{S})$ (on procède comme pour u) ; la flèche de $MF(\mathcal{S})$

$$u \oplus v : \bigoplus_{\alpha=1}^{r} \mathcal{S}(-j_\alpha) \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \oplus (\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$$

a pour graduée $\bar{u}. \oplus \bar{v}.$ qui est un isomorphisme, donc $u \oplus v$ est un isomorphisme dans $MF(\mathcal{S})$ et on a terminé.

LEMME 4.2.2. Un objet $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ de $MF_{qcoh}(\mathcal{S})$ est cohérent si et seulement si le $gr\,\mathcal{S}$-Module $gr\,\mathcal{M}$ est cohérent.

Preuve. Supposons $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ cohérent, alors $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ est, localement sur X, le conoyau d'un morphisme strict $(\mathcal{M}'', \mathcal{M}''_i) \longrightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{M}'_i)$ dans $MF_o(\mathcal{S})$; par suite $gr\,\mathcal{M}$ est, localement sur X, le conoyau d'une flèche $gr\,\mathcal{M}'' \longrightarrow gr\,\mathcal{M}'$ entre $gr\,\mathcal{S}$-Modules projectifs de type fini (cf. 4.2.1) et donc $gr\,\mathcal{M}$ est $gr\,\mathcal{S}$-cohérent (cf. 4.0.7 (ii)).

Réciproquement, supposons $gr\,\mathcal{M}$ cohérent ; en procédant comme dans la preuve de 4.2.1, on vérifie facilement que $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ est de type fini ; soit U un ouvert de X et soit $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_i) \xrightarrow{u} (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)_U$ une flèche dans $MF_{qcoh}(\mathcal{S}_U)$, avec $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$ projectif de type fini, il reste à montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ est de type fini dans $MF_{qcoh}(\mathcal{S}_U)$; vu ce qui précède, il suffit de montrer que $gr(\mathrm{Ker}\, u)$ est cohérent ; comme $gr(\mathrm{Ker}\, u)$ et un sous-$gr\,\mathcal{S}_U$-Module quasi-cohérent de $\mathrm{Ker}(gr\, u)$, qui lui est clairement cohérent, on a terminé.

COROLLAIRE 4.2.3. Le triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_o)$ ci-dessus vérifie les hypothèses (2.6.4) et (2.6.5).

Preuve. X est noethérien donc tout ouvert U de X est quasi-compact ; d'autre part, tout $gr\,\mathcal{S}$-Module projectif de type fini étant cohérent, l'assertion pour (2.6.4) résulte de 4.2.1 et 4.2.2.

Soit $d = 2 \dim X$, soit U un ouvert de X et soit

$$0 \longrightarrow (\mathcal{K}, \mathcal{K}_i) \longrightarrow (\mathcal{L}^{-d+1}, \mathcal{L}_i^{-d+1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\mathcal{L}^{o}, \mathcal{L}_i^{o}) \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longrightarrow 0$$

un complexe acyclique de longueur d dans $MF(\mathcal{S}_U)$ avec $(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}_i^n)$ projectif de type fini, pour $n = 0, \ldots, d-1$; alors le complexe de $gr\,\mathcal{S}$-Modules associé

$$0 \longrightarrow gr\,\mathcal{K} \longrightarrow gr\,\mathcal{L}^{-d+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow gr\,\mathcal{L}^{o} \longrightarrow gr\,\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

est acyclique (cf. 3.3.9) et gr $\mathscr{K}$ est donc un gr $\mathscr{D}$-Module projectif de type fini (cf. 4.0.8 (i)) ; d'où l'assertion pour (2.6.5) en vertu de 4.2.1.

Nous pouvons donc appliquer au triplet $(\mathscr{Y},\mathcal{C},\mathcal{C}_o)$ ci-dessus les résultats 2.6.6, 2.6.7 et 2.6.8.

PROPOSITION 4.2.4. Soit $[(\mathscr{M}^{-1},\mathscr{M}_i^{-1}) \xrightarrow{d} (\mathscr{M}^o,\mathscr{M}_i^o)]$ un objet de $AF_{qcoh}(\mathscr{D})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $(\mathscr{M}^\cdot,\mathscr{M}_i^\cdot) \in$ ob $AF_{parf}(\mathscr{D})$

(ii) Ker(gr d) et Coker(gr d) sont des gr $\mathscr{D}$-Modules cohérents.

Preuve. Pour (i) $\Longrightarrow$ (ii), on remarque que l'assertion est locale sur X , de sorte que l'on peut supposer $(\mathscr{M}^{-1},\mathscr{M}_i^{-1})$ et $(\mathscr{M}^o,\mathscr{M}_i^o)$ parfaits (cf. 2.5.1), i.e. cohérents (cf. 2.6.6) et dans ce cas l'assertion résulte de 4.2.2.

Montrons (ii) $\Longrightarrow$ (i) : par hypothèse Coker(gr d) est cohérent sur gr $\mathscr{D}$; quitte à se localiser sur X , on peut donc supposer qu'il existe une flèche de $MF_{qcoh}(\mathscr{D})$,

$$u^o : (\tilde{\mathscr{M}}^o,\tilde{\mathscr{M}}_i^o) \longrightarrow (\mathscr{M}^o,\mathscr{M}_i^o) ,$$

avec $(\tilde{\mathscr{M}}^o,\tilde{\mathscr{M}}_i^o)$ libre de type fini, telle que la flèche composée

$$\text{gr } \tilde{\mathscr{M}}^o \xrightarrow{\text{gr } u^o} \text{gr } \mathscr{M}^o \longrightarrow \text{Coker(gr d)}$$

soit un épimorphisme (cf. la preuve de 4.2.1) ; soit

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mathscr{M}}^{-1},\tilde{\mathscr{M}}_i^{-1}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & (\tilde{\mathscr{M}}^o,\tilde{\mathscr{M}}_i^o) \\ {\scriptstyle u^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^o} \\ (\mathscr{M}^{-1},\mathscr{M}_i^{-1}) & \xrightarrow{d} & (\mathscr{M}^o,\mathscr{M}_i^o) \end{array}$$

le produit fibré de u^o et d dans $MF_{qcoh}(\mathscr{D})$, alors $u^\cdot$ est un isomorphisme dans $AF_{qcoh}(\mathscr{D})$ et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker(gr d)} \longrightarrow \text{gr } \tilde{\mathscr{M}}^{-1} \xrightarrow{\text{gr } \tilde{d}} \text{gr } \tilde{\mathscr{M}}^o \longrightarrow \text{Coker(gr d)} \longrightarrow 0$$

montre que gr $\tilde{\mathscr{M}}^{-1}$ est gr $\mathscr{D}$-cohérent, i.e. que $(\tilde{\mathscr{M}}^{-1},\tilde{\mathscr{M}}_i^{-1})$ est cohérent (cf. 4.2.2) et donc parfait (cf. 2.6.6), d'où la conclusion

COROLLAIRE 4.2.5. Soit $(\mathscr{M}^\cdot,\mathscr{M}_i^\cdot)$ un objet de $D^bF_{qcoh}(\mathscr{D})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\mathscr{M}^\cdot, \mathscr{M}_i^\cdot) \in \mathrm{ob}\, D^b F_{parf}(\mathscr{D})$,

(ii) $\mathrm{gr}\, \mathscr{M}^\cdot \in \mathrm{ob}\, D^b_{parf}(\mathrm{gr}\, \mathscr{D})$ (cf. [16] I.4.7),

(ii)' pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(\mathrm{gr}\, \mathscr{M}^\cdot)$ est un $\mathrm{gr}\, \mathscr{D}$-Module cohérent,

(iii) $\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathscr{M}^\cdot \in \mathrm{ob}\, D^b_{parf}(\mathcal{O}_{T^*X})$ (cf. [16] I.4.7)

(iii)' pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathscr{M}^\cdot)$ est un $\mathcal{O}_{T^*X}$-Module cohérent.

Preuve. Les équivalences (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii)', (iii) $\Longleftrightarrow$ (iii)' résultent de [16] I.5.10 et I.3.5, compte-tenu de 4.0.7 et 4.0.8. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est immédiate.

Pour (i) $\Longrightarrow$ (ii), on remarque que l'assertion est locale sur X et donc qu'on peut supposer $(\mathscr{M}^\cdot, \mathscr{M}_i^\cdot)$ strictement parfait, auquel cas $\mathrm{gr}\, \mathscr{M}^\cdot$ est aussi strictement parfait (cf. 4.2.1).

Il reste à montrer (ii)' $\Longrightarrow$ (i). Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr\ Coim}\, d^{n-1} & \longrightarrow & \mathrm{gr\ Ker}\, d^n \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathrm{Coim\ gr}\, d^{n-1} & \longrightarrow & \mathrm{Ker\ gr}\, d^n \end{array}$$

et notons C^{n-1} (resp. K^n) le noyau de α (resp. le conoyau de β) ; la première ligne de ce diagramme n'est autre que $\mathrm{gr}\, H^n_\tau(\mathscr{M}^\cdot)$ quant à la seconde, elle s'identifie dans $D(\mathrm{gr}\, \mathscr{D})$ à $H^n(\mathrm{gr}\, \mathscr{M}^\cdot)$ placé en degré 0, on a donc une suite exacte de complexes concentrés en degrés -1 et 0,

$$0 \longrightarrow [C^{n-1} \longrightarrow 0] \longrightarrow \mathrm{gr}\, H^n_\tau(\mathscr{M}^\cdot) \longrightarrow H^n(\mathrm{gr}\, \mathscr{M}^\cdot) \longrightarrow [0 \longrightarrow K^n] \longrightarrow 0 ;$$

on en déduit la suite exacte de $\mathrm{gr}\, \mathscr{D}$-Modules

$$0 \longrightarrow H^0(\mathrm{gr}\, H^n_\tau(\mathscr{M}^\cdot)) \longrightarrow H^n(\mathrm{gr}\, \mathscr{M}^\cdot) \longrightarrow K^n \longrightarrow 0$$

et l'isomorphisme

$$C^{n-1} \xrightarrow{\sim} H^{-1}(\mathrm{gr}\, H^n_\tau(\mathscr{M}^\cdot)) ;$$

de plus, le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{gr\ Ker}\, d^n & \longrightarrow & \mathrm{gr}\, \mathscr{M}^n & \longrightarrow & \mathrm{gr\ Coim}\, d^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker\ gr}\, d^n & \longrightarrow & \mathrm{gr}\, \mathscr{M}^n & \longrightarrow & \mathrm{Coim\ gr}\, d^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre que la flèche canonique

$$C^n \longrightarrow K^n$$

est un isomorphisme. Si $(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}_i^\bullet) \in \mathrm{ob}\, D^b F_{qcoh}(\mathcal{O})$, tous les gr $\mathcal{O}$-Modules apparus ci-dessus sont quasi-cohérents ; par suite, si $H^n(\mathrm{gr}\, \mathcal{M}^\bullet)$ est cohérent, $H^0(\mathrm{gr}\, H^n_\tau(\mathcal{M}^\bullet))$ est cohérent et, si $H^{n-1}(\mathrm{gr}\, \mathcal{M}^\bullet)$ est cohérent, $H^{-1}(\mathrm{gr}\, H^n_\tau(\mathcal{M}^\bullet))$ qui est isomorphe à $C^{n-1} \simeq K^{n-1}$ est cohérent (cf. 4.0.7 (ii)), d'où la conclusion, d'après 4.2.4.

4.3. Nous allons voir que, pour tout objet parfait de $D^b F_{qcoh}(\mathcal{O})$, les gr H^n $(n \in \mathbb{Z})$ de cet objet (cf. 3.5.1) sont des gr $\mathcal{O}$-Modules cohérents

PROPOSITION 4.3.1. *Soit* $(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}_i^\bullet) \in \mathrm{ob}\, AF_{parf}(\mathcal{O})$, *alors* $H^0(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}_i^\bullet) \in \mathrm{ob}\, MF_{parf}(\mathcal{O})$ (*les autres* H^n *étant nuls*) *et la suite spectrale* $((E_r^{pq}, d_r^{pq})_{r \geqslant 1}, E_\infty^{pq})$ *attachée à cet objet* (cf. 3.5.5) *dégénère : il existe* r_o *tel que* $d_r^{pq} = 0$ *pour tout* $r_o \leqslant r < \infty$ *et donc tel que*

$$E_r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \mathrm{gr}.H^0(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}_i^\bullet) & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

pour tout $r \geqslant r_o$.

Preuve. Par hypothèse, E_1^{-1} et E_1^0 sont des gr $\mathcal{O}$-Modules cohérents et on a

$$E_1^{-1} \supset \text{---} \supset E_r^{-1} \supset E_{r+1}^{-1} \supset \text{---} \supset E_\infty^{-1}$$

$$E_1^0 \twoheadrightarrow \text{---} \twoheadrightarrow E_r^0 \twoheadrightarrow E_{r+1}^0 \twoheadrightarrow \text{---} \twoheadrightarrow E_\infty^0$$

donc tous les E_r^{-1} , E_r^0 sont aussi des gr $\mathcal{O}$-Modules cohérents (ils sont clairement quasi-cohérents puisque tous les $\mathcal{M}_i^{-1}$, $\mathcal{M}_i^0$ sont quasi-cohérents sur $\mathcal{O}$). De plus, comme T^*X est noethérien, la suite $(E_r^0)_{r \geqslant 1}$ est nécessairement stationnaire, donc $d_r^{-1} = 0$ pour $r \gg 0$ et la suite $(E_r^{-1})_{r \geqslant 1}$ est aussi stationnaire (cf. 3.5.13 (iii)), d'où la conclusion.

COROLLAIRE 4.3.2. *Soit* $(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}_i^\bullet) \in \mathrm{ob}\, DF^b_{parf}(\mathcal{O})$, *alors* $H^n(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}_i^\bullet)$ *est dans* $MF_{parf}(\mathcal{O})$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ (*et nul pour presque tout* $n \in \mathbb{Z}$).

Preuve. Le corollaire résulte de 4.3.1, 3.5.3 (ii) et 2.6.7.

4.4. Récapitulons nos résultats principaux :

(4.4.1) $MF_{parf}(\mathcal{O})$ est la sous-catégorie strictement pleine de $MF_{qcoh}(\mathcal{O})$ formée des $\mathcal{O}$-Modules filtrés $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ dont le gradué gr $\mathcal{M}$ est un gr $\mathcal{O}$-Module cohérent ; $MF_{parf}(\mathcal{O})$ est une sous-catégorie exacte avec noyaux et coimages, stable par extensions, par quotients stricts et par

sous-objets stricts de $MF_{qcoh}(\mathcal{D})$.

(4.4.2) $AF_{parf}(\mathcal{D})$ est la sous-catégorie strictement pleine de $AF_{qcoh}(\mathcal{D})$ formée des objets $[(\mathcal{M}^{-1},\mathcal{M}_i^{-1}) \xrightarrow{d} (\mathcal{M}^{0},\mathcal{M}_i^{0})]$ de $AF_{qcoh}(\mathcal{D})$ tels que Ker(gr d) et Coker(gr d) soient des gr $\mathcal{D}$-Modules cohérents ; $AF_{parf}(\mathcal{D})$ est une sous-catégorie abélienne, stable par extensions, de $AF_{qcoh}(\mathcal{D})$; si l'on identifie $MF_{qcoh}(\mathcal{D})$ à la sous-catégorie pleine de $AF_{qcoh}(\mathcal{D})$ formée des objets $[0 \longrightarrow (\mathcal{M},\mathcal{M}_i)]$, on a

$$MF_{parf}(\mathcal{D}) = MF_{qcoh}(\mathcal{D}) \cap AF_{parf}(\mathcal{D}) .$$

(4.4.3) $D^bF_{parf}(\mathcal{D})$ est la sous-catégorie strictement pleine de $D^bF_{qcoh}(\mathcal{D})$ formée des complexes bornés de $\mathcal{D}$-Modules filtrés $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ qui vérifient les conditions équivalentes suivantes :

(i) $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ est, localement sur X, isomorphe dans $DF_{qcoh}(\mathcal{D})$ à un complexe borné à composantes des $\mathcal{D}$-Modules filtrés projectifs de type fini,

(ii) gr $\mathcal{M}^\cdot \in$ ob $D^b_{parf}(\text{gr } \mathcal{D})$,

(ii)' pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(\text{gr } \mathcal{M}^\cdot)$ est un gr $\mathcal{D}$-Module cohérent,

(iii) $\widetilde{\text{gr}}\ \mathcal{M}^\cdot \in$ ob $D^b_{parf}(\mathcal{O}_{T^*X})$,

(iii)' pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(\widetilde{\text{gr}}\ \mathcal{M}^\cdot)$ est un $\mathcal{O}_{T^*X}$-Module cohérent,

(iv) $H^n_\tau(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot) \in$ ob $AF_{parf}(\mathcal{D})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$D^bF_{parf}(\mathcal{D})$ est une sous-catégorie triangulée de $D^bF_{qcoh}(\mathcal{D})$.

(4.4.4) Si $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot) \in$ ob $D^bF_{parf}(\mathcal{D})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H^n(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot) \in$ ob $MF_{parf}(\mathcal{D})$.

Remarque 4.5. Les résultats de ce numéro valent tout aussi bien pour k un schéma noethérien, de dimension cohomologique finie et de caractéristique 0 (il faut bien entendu dans 4.0.8 et 4.0.8.1 remplacer $2\dim_k X$ et $\dim_k X$ par $2\dim_k X + N$ et $\dim_k X + N$ respectivement, où N est la dimension cohomologique de k).

5. IMAGE DIRECTE D'UN COMPLEXE DE $\mathscr{D}$-MODULES FILTRÉS PAR UN MORPHISME PROPRE.

5.0. Dans tout ce numéro, tous les schémas considérés sont des schémas séparés, de type fini et lisses sur un corps k de caractéristique 0 et tous les morphismes de schémas sont des k-morphismes séparés.

Pour tout schéma X, on notera $d_X : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction localement constante "dimension de X/k", $\omega_X = \Omega^{d_X}_{X/k}$ le $\mathscr{O}_X$-Module inversible "dualisant de X/k" et

$$T^*X = \mathbb{V}(\mathscr{C}_X) \xrightarrow{\pi_X} X \quad , \quad (\pi_X)_* \mathscr{O}_{T^*X} = \operatorname{gr} \mathscr{D}_X$$

le cotangent de X/k.

Pour tout morphisme de schémas $f : X \longrightarrow Y$, on notera

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{\pi_X}{\frown} & \\ T^*X & \xleftarrow{F} & T^*Y \times_Y X & \xrightarrow{\pi_f} & X \\ & & \bar{f} \downarrow & & \downarrow f \\ & & T^*Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array} \tag{5.0.1}$$

les projections canoniques (on a

$$T^*Y \times_Y X = \mathbb{V}(f^*\mathscr{C}_Y) \xrightarrow{\pi_f} X \quad , \quad (\pi_f)_* \mathscr{O}_{T^*Y \times_Y X} = f^* \operatorname{gr} \mathscr{D}_Y) \ ;$$

on notera $d_f = d_X - d_Y \circ f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction dimension relative de f et $\omega_{X/Y} = f^{-1}(\omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \omega_X$ le $\mathscr{O}_X$-Module inversible "dualisant relatif de f".

A tout $f : X \longrightarrow Y$, Kashiwara (cf. [7] 4) associe un $(f^{-1}\mathscr{D}_Y, \mathscr{D}_X)$-bi-Module

$$\mathscr{D}_{Y \leftarrow X} = f^{-1}(\mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \omega_X \tag{5.0.2}$$

et un foncteur "image directe"

$$\int_f : D(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D(\mathscr{D}_Y) \tag{5.0.3}$$

$$\int_f \mathscr{M}^\cdot = Rf_*(\mathscr{D}_{Y \leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}^\cdot) \ .$$

Le but de ce numéro est de définir, pour f propre, une variante "filtrée" de (5.0.3).

5.1. Commençons par quelques préliminaires à propos de $\mathscr{D}_{Y \leftarrow X}$.

On a, pour tout $f : X \longrightarrow Y$,

$$\mathscr{D}_{Y \leftarrow X} = (f^{-1}(\mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X$$

et la structure de $(f^{-1}\mathscr{D}_Y, \mathscr{D}_X)$-bi-Module de $\mathscr{D}_{Y \leftarrow X}$ se lit comme suit :

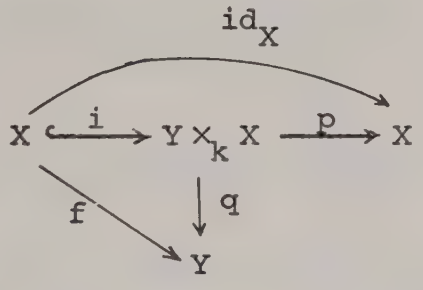
- $f^{-1}\mathscr{D}_Y$ opère par multiplication à gauche

- $\mathscr{D}_Y$ est de façon évidente un $\mathscr{D}_Y$-Module à droite, donc $\mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{\otimes -1} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_Y}(\omega_Y, \mathscr{D}_Y)$ a une structure naturelle de $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche ; par suite $f^{-1}(\mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$ a une structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche ; enfin, $\mathscr{D}_{Y \leftarrow X} = (f^{-1}(\mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X$ a une structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-Module à droite (cf. [8] 1.6)

- les structures de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Module à gauche et de $\mathscr{D}_X$-Module à droite commutent car les structures de $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche et à droite de $\mathscr{D}_Y$ commutent.

Si on note

(5.1.1)



la factorisation canonique de f par son graphe ($i(x) = (f(x), x)$; p, q sont les projections canoniques), on a aussi (cf. [8] 4.1)

$$\mathscr{D}_{Y \leftarrow X} = (i^{-1}\, \mathcal{H}^{d_Y}_X(\mathscr{O}_{Y \times_k X})) \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X \tag{5.1.2}$$

où

$$\mathcal{H}^{d_Y}_X(\mathscr{O}_{Y \times_k X}) = \varinjlim_i \underline{\mathrm{Ext}}^{d_Y}_{\mathscr{O}_{Y \times_k X}}(\mathscr{O}_{Y \times_k X}/\mathscr{J}^{i+1}, \mathscr{O}_{Y \times_k X})$$

$\mathscr{J}$ étant le $\mathscr{O}_{Y \times_k X}$-Idéal définissant l'immersion fermée i (cf. [6] V 4.3). Sur cette nouvelle description, on lit la structure de $(f^{-1}\mathscr{D}_Y, \mathscr{D}_X)$-bi-Module de la façon suivante :

- $\mathcal{H}^{d_Y}_X(\mathcal{O}_{Y\times_k X})$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_{Y\times_k X}$-Module à gauche (cf. [8] 1.1), donc $i^{-1}\,\mathcal{H}^{d_Y}_X(\mathcal{O}_{Y\times_k X})$ est un $(f^{-1}\,\mathcal{D}_Y,\mathcal{D}_X)$-bi-Module (à gauche pour les deux structures ; les homomorphismes d'Anneaux $p^{-1}\,\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{Y\times_k X}$, $q^{-1}\,\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{Y\times_k X}$ et la décomposition $\mathcal{C}_{Y\times_k X} = q^*\mathcal{C}_Y \oplus p^*\mathcal{C}_X$, définissent des homomorphismes d'Anneaux $p^{-1}\,\mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{D}_{Y\times_k X}$ et $q^{-1}\,\mathcal{D}_Y \longrightarrow \mathcal{D}_{Y\times_k X}$)

- la structure de $f^{-1}\,\mathcal{D}_Y$-Module à gauche de $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ vient de $i^{-1}\,\mathcal{H}^{d_Y}_X(\mathcal{O}_{Y\times_k X})$

- la structure de $\mathcal{D}_X$-Module à droite de $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = (i^{-1}\,\mathcal{H}^{d_Y}_X(\mathcal{O}_{Y\times_k X}))\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_X$ vient de celle de $\mathcal{D}_X$-Module à gauche $i^{-1}\,\mathcal{H}^{d_Y}_X(\mathcal{O}_{Y\times_k X})$.

On définit le $(f^{-1}\,\mathcal{D}_Y,\mathcal{D}_X)$-bi-Module filtré

$$(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\,,\ \mathcal{D}_{Y\leftarrow X,i}) \tag{5.1.3}$$

comme suit : on pose, pour tout $i\in\mathbb{Z}$,

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X,i} = f^{-1}(\mathcal{D}_{Y,i}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega_Y^{\otimes -1})\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}\omega_X\ ;$$

on a

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X,i} = 0 \text{ pour } i<0 \text{ et } \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_{Y\leftarrow X,i} = \mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \tag{5.1.3.1}$$

$$f^{-1}\,\mathcal{D}_{Y,j}\cdot\mathcal{D}_{Y\leftarrow X,i}\cdot\mathcal{D}_{X,k} \subset \mathcal{D}_{Y\leftarrow X,i+j+k} \text{ pour tous } i,j,k\in\mathbb{Z}, \tag{5.1.3.2}$$

avec égalité dès que $k=0$.

Par suite $(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\,,\ \mathcal{D}_{Y\leftarrow X,i})$ est à la fois un $f^{-1}\,\mathcal{D}_Y$-Module à gauche filtré et un $\mathcal{D}_X$-Module à droite filtré (cf. 3.1).

De plus

$$\operatorname{gr}\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = f^*\operatorname{gr}\mathcal{D}_Y\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_{X/Y} \tag{5.1.4}$$

et $\operatorname{gr}\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ a une structure naturelle de $f^*\operatorname{gr}\mathcal{D}_Y$-Module, la structure de $(f^{-1}\operatorname{gr}\mathcal{D}_Y, \operatorname{gr}\mathcal{D}_X)$-bi-Module de $\operatorname{gr}\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ se lisant alors comme suit :

- $f^{-1}\ \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_Y$ opère via la flèche canonique $f^{-1}\ \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_Y \longrightarrow f^*\ \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_Y$,

- $\mathrm{gr}\ \mathscr{D}_X$ opère via la flèche canonique $\mathrm{gr}\ \mathscr{D}_X \longrightarrow f^*\ \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_Y$ induite par $\mathscr{C}_X \longrightarrow f^*\mathscr{C}_Y$.

Dans la description (5.1.2) de $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$, on a

$$(5.1.5)\qquad \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i} = (i^{-1}\ \underline{\mathrm{Ext}}^{d_X}_{\mathscr{O}_{Y\times_k X}}(\mathscr{O}_{Y\times_k X}/\mathscr{J}^{i+1}, \mathscr{O}_{Y\times_k X}))\otimes_{\mathscr{O}_X}\omega_X$$

pour tout $i \geqslant 0$.

Le comportement par composition de $(\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}, \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i})$ est le suivant : si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux morphismes, on a

$$(5.1.6)\qquad \mathscr{D}_{Z\leftarrow X} = f^{-1}\mathscr{D}_{Z\leftarrow Y} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y} \mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$$

en tant que $((g\circ f)^{-1}\mathscr{D}_Z, \mathscr{D}_X)$-bi-Module ; pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$(5.1.7)\qquad \mathscr{D}_{Z\leftarrow X,i} = \mathrm{Im}\Big(\bigoplus_{j+k=i} f^{-1}\mathscr{D}_{Z\leftarrow X,j} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,k} \longrightarrow \mathscr{D}_{Z\leftarrow X}\Big)$$

d'où, par passage aux gradués, un isomorphisme

$$(5.1.8)\qquad \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_{Z\leftarrow X} = f^*\ \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_{Z\leftarrow Y} \otimes_{f^*\mathrm{gr}\ \mathscr{D}_Y} \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$$

qui n'est autre que l'isomorphisme évident.

5.2. Nous allons donner des descriptions plus explicites de $(\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}, \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i})$ dans un certain nombre de cas particuliers.

5.2.1. Supposons $f : X \longrightarrow Y$ étale, alors, on a canoniquement $\mathscr{C}_X \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{C}_Y$ et $\omega_{X/Y} = \mathscr{O}_X$, d'où des flèches canoniques

$$f^{-1}\mathscr{D}_Y \longrightarrow \mathscr{D}_X \longrightarrow \mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$$

(la première est un homomorphisme d'Anneaux, induit par $f^{-1}\mathscr{C}_Y \longrightarrow f^*\mathscr{C}_Y \xleftarrow{\sim} \mathscr{C}_X$; la seconde est un homomorphisme de $\mathscr{D}_X$-Modules à droite et envoie 1 sur $f^{-1}(1)\otimes 1 \in f^{-1}\mathscr{D}_Y \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$) ; on vérifie en fait facilement que la flèche $\mathscr{D}_X \longrightarrow \mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$ respecte les filtrations $\mathscr{D}_{X,i}$ et $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i}$ et est $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-linéaire à gauche pour la structure de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Module à gauche de $\mathscr{D}_X$ donnée par l'homomorphisme d'Anneaux $f^{-1}\mathscr{D}_Y \longrightarrow \mathscr{D}_X$.

Par suite, on a une flèche canonique

$$(5.2.1.1)\qquad (\mathscr{D}_X, \mathscr{D}_{X,i}) \longrightarrow (\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}, \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i})$$

de $(f^{-1}\mathscr{D}_Y, \mathscr{D}_X)$-bi-Modules filtrés.

LEMME 5.2.1.2. La flèche (5.2.1.1) est un isomorphisme.

Preuve. Le gradué de (5.2.1.1) n'est autre que l'isomorphisme

$$\mathrm{gr}\ \mathscr{D}_X \xrightarrow{\sim} f^*\ \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_Y$$

induit par l'isomorphisme $\mathscr{T}_X \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{T}_Y$.

5.2.2. Supposons que $f : X \longrightarrow Y$ est une immersion fermée, définie par un idéal $\mathscr{J}$ engendré par $n = d_Y \circ f - d_X = -d_f$ sections globales $y_1,\dots,y_n$ (en chaque point x de X, $(y_1,\dots,y_n)$ est une suite régulière dans $\mathscr{J}_x$). Alors $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ est une base de $\overset{n}{\Lambda}(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$ et on notera $\omega(\underline{y})$ sa base duale : $\omega(\underline{y})$ est donc une base de $\omega_{X/Y}$. On dispose alors d'un morphisme de $\mathscr{D}_X$-Modules à droite (dépendant du choix des $y_1,\dots,y_n$)

$$\mathscr{O}_X[\partial/\partial y_1,\dots,\partial/\partial y_n] \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X \longrightarrow \mathscr{D}_{Y \leftarrow X}$$

$$\partial^{\underline{\alpha}}/\partial \underline{y}^{\underline{\alpha}} \otimes P \longmapsto (f^{-1}(\partial^{\underline{\alpha}}/\partial \underline{y}^{\underline{\alpha}}) \otimes \omega(\underline{y})).P \ .$$

On filtrera $\mathscr{O}_X[\partial/\partial_{\underline{y}}] = \mathscr{O}_X[\partial/\partial y_1,\dots,\partial/\partial y_n]$ par le degré en les $\partial/\partial y_i$ et on filtrera $\mathscr{O}_X[\partial/\partial \underline{y}] \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X$ par la filtration produit tensoriel de celle de $\mathscr{O}_X[\partial/\partial \underline{y}]$ et de celle de $\mathscr{D}_X$; on vérifie facilement que la flèche ci-dessus induit un morphisme de $\mathscr{D}_X$-Modules à droite filtrés

$$(5.2.2.1) \qquad (\mathscr{O}_X[\partial/\partial \underline{y}] \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X\ ,\ \bigoplus_{j+k=i} \mathscr{O}_X[\partial/\partial \underline{y}]_j \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_{X,k})$$

$$\longrightarrow (\mathscr{D}_{Y \leftarrow X}\ ,\ \mathscr{D}_{Y \leftarrow X,i}) \ .$$

LEMME 5.2.2.2. La flèche (5.2.2.1) est un isomorphisme.

Preuve. Le gradué de (5.2.2.1) est la flèche

$$\mathscr{O}_X[\partial/\partial \underline{y}] \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_X \longrightarrow f^*\ \mathrm{gr}\ \mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_{X/Y}$$

$$(\partial^{\underline{\alpha}}/\partial \underline{y}^{\underline{\alpha}}) \otimes P \longmapsto (f^{-1}(\partial^{\underline{\alpha}}/\partial \underline{y}^{\underline{\alpha}}) \otimes \omega(\underline{y})).P$$

qui est clairement un isomorphisme, puisque

$$f^*\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_X \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{O}_X.\partial/\partial y_i \ .$$

Remarque 5.2.2.3. En général, on n'a pas de description simple de l'action à gauche de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$ sur $\mathscr{O}_X[\partial/\partial\underline{y}]\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}_X$ induite par l'isomorphisme (5.2.2.1), aussi, il peut être utile de considérer la flèche

$$f^{-1}\mathscr{D}_Y \longrightarrow \mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$$
$$f^{-1}Q \longmapsto f^{-1}Q\otimes\omega(\underline{y})$$

(qui dépend toujours du choix des $y_1,\dots,y_n$) ; cette flèche induit un isomorphisme de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche filtrés

$$(f^{-1}(\mathscr{D}_Y/\mathscr{D}_Y\mathscr{J}),f^{-1}(\mathscr{D}_Y/\mathscr{D}_Y\mathscr{J})_i) \tag{5.2.2.4}$$
$$\xrightarrow{\sim}(\mathscr{D}_{Y\leftarrow X},\mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i})$$

où $(\mathscr{D}_Y/\mathscr{D}_Y\mathscr{J})_i$ est l'image de $\mathscr{D}_{Y,i}$ dans $\mathscr{D}_Y/\mathscr{D}_Y\mathscr{J}$.

5.2.3. Supposons $f:X\longrightarrow Y$ lisse, on dispose du complexe de De Rham filtré relatif à Y de $\mathscr{D}_X$,

$$(DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X),DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X)_i) \tag{5.2.3.1}$$

(cf. [4] 2.1), où

$$DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X)=[\mathscr{D}_X\longrightarrow\Omega^1_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}_X\longrightarrow\cdots\longrightarrow\Omega^d_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}_X],$$

d étant la dimension relative d_f de f, $\Omega^d_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}_X$ étant placé en degré 0 et la différentielle étant définie par

$$\omega\otimes P\longmapsto(d\omega)\otimes P+\sum_{i=1}^{d}(dx_i\wedge\omega)\otimes(\partial/\partial x_i.P)$$

dans tout système $(x_1,\dots,x_d)$ de coordonnées locales relatif à Y, et où

$$DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X)_i=[\mathscr{D}_{X,i-d}\longrightarrow\Omega^1_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}_{X,i-d+1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\Omega^d_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}_{X,i}].$$

Il est clair que (5.2.3.1) est un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules à droite filtrés et que

$$\mathrm{gr}.DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X)=[\mathrm{gr}.\mathscr{D}_X(-d)\longrightarrow\Omega^1_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathrm{gr}.\mathscr{D}_X(-d+1)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\Omega^d_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathrm{gr}.\mathscr{D}_X] \tag{5.2.3.2}$$

où la différentielle est définie par

$$\omega\otimes\bar{P}\longmapsto\sum_{i=1}^{d}(dx_i\wedge\omega)\otimes(\overline{\partial/\partial x_i}.P)$$

pour tout système $(x_1,\dots,x_d)$ de coordonnées locales relatif à Y.

On dispose de plus d'une augmentation canonique de complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules à droite filtrés

$$(5.2.3.3) \qquad (DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X), DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X)_i) \longrightarrow (\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}, \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i})$$

définie comme suit (cf. [10] 2, 14.3.5) :

$$\omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,o} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X \longrightarrow \mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$$

(où la première flèche est induite par l'isomorphisme $\omega_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,o}$ et où la seconde vient de la structure de $\mathscr{D}_X$-Module à droite de $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$).

LEMME 5.2.3.4. Le complexe augmenté (5.2.3.3) est un complexe acyclique de $\mathscr{D}_X$-Modules à droite filtrés et donc une résolution à gauche de $(\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}, \mathscr{D}_{Y\leftarrow X,i})$ par des $\mathscr{D}_X$-Modules à droite localement libres filtrés.

Preuve. Il suffit de vérifier (cf. 3.3.9) que le gradué de (5.2.3.3),

$$\operatorname{gr} DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \operatorname{gr} \mathscr{D}_{Y\leftarrow X} = f^* \operatorname{gr} \mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_{X/Y}$$

est acyclique ; or, une fois choisi un système $(x_1,\dots,x_d)$ de coordonnées locales relatif à Y, ce dernier complexe n'est autre qu'un complexe de Koszul, d'où la conclusion.

5.2.4. Supposons que $f : X \longrightarrow Y$ soit une projection, i.e. qu'il existe une décomposition $X = Y \times_k Z$ et que $f(y,z) = y$; on notera $g : X = Y \times_k Z \longrightarrow Z$ la deuxième projection canonique ; bien entendu, f est lisse et on dispose de (5.2.3.3), mais, de plus, on a un homomorphisme d'Anneaux

$$f^{-1} \mathscr{D}_Y \longrightarrow \mathscr{D}_X$$

($\mathscr{C}_X = f^*\mathscr{C}_Y \oplus g^*\mathscr{C}_Z$) et on a, pour tout $p = 0,\dots,d$ $(d = d_Z)$,

$$\Omega^p_{X/Y} = g^* \Omega^p_{Z/k}$$

de sorte que

$$(5.2.4.1) \qquad DR_{X/Y}(\mathscr{D}_X) = [\mathscr{D}_X \longrightarrow g^{-1}\Omega^1_{Z/k} \otimes_{g^{-1}\mathscr{O}_Z} \mathscr{D}_X \longrightarrow$$
$$\dots \longrightarrow g^{-1}\Omega^d_{Z/k} \otimes_{g^{-1}\mathscr{O}_Z} \mathscr{D}_X]$$

et que (5.2.3.3) est un complexe acyclique de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche filtrés : $f^{-1}\mathscr{D}_Y$ opère sur $g^{-1}\Omega^p_{Z/k} \otimes_{g^{-1}\mathscr{O}_Z} \mathscr{D}_X$, via $f^{-1}\mathscr{D}_Y \longrightarrow \mathscr{D}_X$.

5.3. A titre d'intermédiaire entre $MF(\mathcal{O}_X)$ et $MF(\mathcal{O}_Y)$ dans la définition de $\int_f$ pour $f : X \longrightarrow Y$, nous introduirons la catégorie

$$MF(\mathcal{O}_Y, f) = MF(X/Y) \tag{5.3.1}$$

suivante :

- un objet est un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Module filtré $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ (cf. 3.1) dont le gradué, $gr.\mathcal{M}$, est muni d'une structure de f^* gr. $\mathcal{O}_Y$-Module gradué qui prolonge sa structure naturelle de f^{-1} gr. $\mathcal{O}_Y$-Module gradué ; en d'autres termes, chaque $gr_i \mathcal{M}$ $(i \in \mathbb{Z})$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X$-Module qui prolonge celle de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Module et la structure de $\mathcal{O}_X$-Module qu'on en déduit sur $gr\,\mathcal{M}$ commute avec celle de f^{-1} gr $\mathcal{O}_Y$-Module ;

- une flèche est un morphisme $u : (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$ entre les $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modules filtrés sous-jacents dont le gradué gr u est $\mathcal{O}_X$-linéaire et donc f^* gr $\mathcal{O}_Y$-linéaire.

Remarques 5.3.2. (i) $MF(\mathcal{O}_X, id_X) = MF(\mathcal{O}_X)$

(ii) $(\mathcal{O}_{Y \leftarrow X}, \mathcal{O}_{Y \leftarrow X, i})$, vu comme $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Module filtré à gauche et dont le gradué est muni de sa structure naturelle de f^* gr. $\mathcal{O}_Y$-Module gradué (cf. 5.1.4)), est un objet de $MF(\mathcal{O}_Y, f)$.

On a, par définition, des foncteurs

$$gr. : MF(\mathcal{O}_Y, f) \longrightarrow MG(f^* \text{ gr. } \mathcal{O}_Y) \tag{5.3.3}$$

$$gr : MF(\mathcal{O}_Y, f) \longrightarrow M(f^* \text{ gr } \mathcal{O}_Y)\ . \tag{5.3.4}$$

PROPOSITION 5.3.5. *La catégorie* $MF(\mathcal{O}_Y, f)$ *munie de la classe des suites*

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{M}'_i) \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathcal{M}'', \mathcal{M}''_i) \longrightarrow 0$$

qui sont exactes en tant que suites de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$*-Modules filtrés* (cf. 3.3.6) *est une catégorie exacte ; tout morphisme* $u : (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{N}_i)$ *dans* $MF(\mathcal{O}_Y, f)$ *qui est un monomorphisme strict* (*resp. un épimorphisme strict, resp. un morphisme strict*) *dans* $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$ *l'est aussi dans* $MF(\mathcal{O}_Y, f)$; *les foncteurs* (5.3.3) *et* (5.3.4) *sont exacts.*

Preuve. Compte-tenu de 3.3.6 appliqué à $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$, la seule chose à vérifier est la seconde assertion ; mais si u est strict dans $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$, gr Ker u = Ker gr u , gr Coim u = Coim gr u,..., pour Ker u , Coim u,... dans $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$ ce qui met en évidence une structure $\mathcal{O}_X$-linéaire sur gr Ker u , gr Coim u,... .

Remarque 5.3.5.1. En général, un morphisme de $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ n'admet ni noyau ni coimage dans $MF(\mathcal{O}_Y,f)$; à fortiori, en général, $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ ne vérifie ni (1.2.2.1) ni (1.3.0).

PROPOSITION 5.3.6. *Pour un complexe* $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ *borné de* $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ *est acyclique* (cf. 1.2.1),

(ii) *le complexe de* $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$ *sous-jacent à* $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ *est acyclique,*

(iii) $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}^\cdot$ *est acyclique dans* $C^b(f^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_Y)$.

Preuve. Compte-tenu de 3.3.9, la seule chose à vérifier est (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Pour (ii) $\Longrightarrow$ (i), on remarque que les $d^n_{\mathcal{M}}$ $(n\in\mathbb{Z})$ sont strictes dans $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ d'après 1.2.2 (ii) et 5.3.5, par suite $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ se dévisse dans $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ en suites exactes courtes et donc le complexe $h((\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot))\in \mathrm{ob}\,\mathcal{T}(MF(\mathcal{O}_Y,f))$ (cf. 1.0.3) aussi, d'où la conclusion (cf. 1.2.1). Pour (i) $\Longrightarrow$ (ii), on remarque que le foncteur $\varphi : MF(\mathcal{O}_Y,f)\longrightarrow MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$ ("oubli de la structure de $\mathcal{O}_X$-Module") est exact et donc continu pour les topologies considérées en 1.0.3 sur $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ et $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$ (cf. [15] III 1.6) ; par suite, φ admet un prolongement

$$\mathcal{T}(\varphi) : \mathcal{T}(MF(\mathcal{O}_Y,f))\longrightarrow \mathcal{T}(MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y))$$

qui est exact à droite (cf. [15] III 1.2 (iv) et 1.3 (4)) ; soit alors $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ borné et acyclique et soit n_o tel que $(\mathcal{M}^n,\mathcal{M}_i^n)=0$ pour $i>n_o$, alors $\mathcal{T}(\varphi)\circ h(d^{n_o-1}_{\mathcal{M}})$ est un épimorphisme, donc $\varphi(d^{n_o-1}_{\mathcal{M}})$ est un épimorphisme strict dans $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$ (car $h\circ\varphi(d^{n_o-1}_{\mathcal{M}})$ en est un et que $\varphi(d^{n_o-1}_{\mathcal{M}})$ a un noyau dans $MF(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$) et finalement $d^{n_o-1}_{\mathcal{M}}$ est un épimorphisme strict dans $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ (cf. (5.3.5)) ; alors $\tau_{\leqslant n_o-1}(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ est bien défini ($\mathrm{Ker}\,d^{n_o-1}_{\mathcal{M}}$ existe ; cf. 1.3) et est clairement acyclique ; ceci permet de dévisser $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^\cdot)$ en suites exactes courtes dans $MF(\mathcal{O}_Y,f)$, auquel cas la conclusion est immédiate.

DEFINITION 5.3.7. *Un objet* $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ *de* $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ *sera dit quasi-cohérent si son gradué est* $\mathcal{O}_X$*-quasi-cohérent* (*ou ce qui revient au même* $f^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_Y$*-quasi-cohérent*).

On notera $MF_{qcoh}(\mathcal{O}_Y,f)$ la sous-catégorie strictement pleine de $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ formée des objets quasi-cohérents ; $MF_{qcoh}(\mathcal{O}_Y,f)$ est une sous-catégorie exacte de $MF(\mathcal{O}_Y,f)$ et vérifie aussi les conclusions de 5.3.5 et 5.3.6. Par définition, les foncteurs (5.3.3), (5.3.4) respectent

la quasi-cohérence ; en particulier, puisque $(\pi_f)_* \mathcal{O}_{T*Y \times_Y X} = f^* \operatorname{gr} \mathcal{O}_Y$, on a un foncteur

$$\widetilde{\operatorname{gr}} : MF_{qcoh}(\mathcal{O}_Y, f) \longrightarrow M_{qcoh}(\mathcal{O}_{T*Y \times_Y X}) \quad (5.3.8)$$

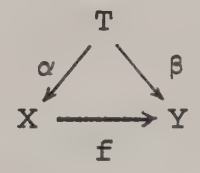
On dispose en outre des catégories $C^\alpha F(\mathcal{O}_Y, f)$, $K^\alpha F(\mathcal{O}_Y, f)$, $D^\alpha F(\mathcal{O}_Y, f)$ (resp. $C^\alpha F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y, f)$, $K^\alpha F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y, f)$, $D^\alpha F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y, f)$) construites en 1.1 et 1.2 à partir de $\mathcal{C} = MF(\mathcal{O}_Y, f)$ (resp. $\mathcal{C} = MF_{qcoh}(\mathcal{O}_Y, f)$), pour $\alpha = \infty, +, -, b$; les foncteurs (5.3.3), (5.3.4) et (5.3.8) se dérivent trivialement sur D^b (cf. 1.6.2 et 5.3.6). En particulier, on a un foncteur

$$\widetilde{\operatorname{gr}} : D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y, f) \longrightarrow D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T*Y \times_Y X}) \quad (5.3.9)$$

Remarque 5.3.10. On a $MF_{qcoh}(\mathcal{O}_X, id_X) = MF_{qcoh}(\mathcal{O}_X)$ (cf. 3.6.2.2) et donc $D^\alpha F_{qcoh}(\mathcal{O}_X, id_X) = D^\alpha F_{qcoh}(\mathcal{O}_X)$.

5.4. Nous allons étudier deux fonctorialités de $D^b F_{qcoh}(X/Y)$. Commençons par une fonctorialité par rapport à Y.

Construction 5.4.1. Pour tout triangle commutatif de morphismes de schémas



il existe un foncteur

$$DF(T/f) : D^b F_{qcoh}(T/X) \longrightarrow D^b F_{qcoh}(T/Y)$$

tel que les carrés de foncteurs ci-dessous "commutent" :

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(T/X) & \xrightarrow{DF(T/f)} & D^b F_{qcoh}(T/X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^b_{qcoh}(\alpha^{-1}\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\alpha^{-1}\mathcal{O}_{Y \leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} (-)} & D^b_{qcoh}(\beta^{-1}\mathcal{O}_Y) \end{array} \quad (5.4.1.1)$$

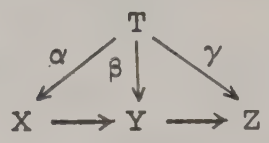
où les flèches verticales sont les flèches "d'oubli de la filtration", et

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(T/X) & \xrightarrow{DF(T/f)} & D^b F_{qcoh}(T/Y) \\ \downarrow \widetilde{\operatorname{gr}} & & \downarrow \widetilde{\operatorname{gr}} \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T*X \times_X T}) & \xrightarrow{F_T^!(-)[d_f]} & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T*Y \times_Y T}) \end{array} \quad (5.4.1.2)$$

où d_f est la dimension relative de f et où

$$F_T = F \times_X id_T : T^*X \times_X T \longrightarrow T^*Y \times_Y T .$$

De plus, pour tout diagramme commutatif de morphismes de schémas



on a un isomorphisme canonique de foncteurs

(5.4.1.3) $$DF(T/g\circ f) \simeq DF(T/g)\circ DF(T/f)$$

qui vérifie la condition de cocycle usuelle.

La construction est analogue à celle de $f^!$ (cf. [6] III, §8). Nous traiterons d'abord le cas où f est une immersion fermée puis le cas où f est une projection.

Pour $f : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée, on définit un foncteur

(5.4.2) $$MF(T/f) : MF_{qcoh}(T/X) \longrightarrow MF_{qcoh}(T/Y)$$

ce foncteur envoie $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ sur $(\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$ avec

$$\mathcal{N} = \alpha^{-1}\,\mathcal{O}_{Y\leftarrow X} \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

$$\mathcal{N}_i = \mathrm{Im}\Big(\bigoplus_{j+k=i} \alpha^{-1}\,\mathcal{O}_{Y\leftarrow X,j} \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}\Big)$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$; il est clair que $(\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$ est un $\beta^{-1}\,\mathcal{O}_Y$-Module filtré ($\beta = f\circ\alpha$) ; de plus, on vérifie à l'aide de 5.2.2.2 que la flèche canonique

$$\alpha^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_{Y\leftarrow X} \otimes_{\alpha^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}\,\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{gr}\,\mathcal{N}$$

est un isomorphisme (la question est locale) ; or, par hypothèse, $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ est un $\alpha^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_X$-Module, donc

$$\alpha^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_{Y\leftarrow X} \otimes_{\alpha^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}\,\mathcal{M} = (\beta^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_T} \alpha^*\omega_{X/Y}) \otimes_{\alpha^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}\,\mathcal{M} ,$$

ce qui met en évidence une structure canonique de $\beta^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent sur $\mathrm{gr}\,\mathcal{N}$ et complète la définition de $MF(T/f)$.

De plus, $f^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/Y}$ est un $\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_X$-Module plat (cf. 5.2.2.2), donc $MF(T/f)$ se dérive trivialement (cf. 1.6.2 et 5.3.6) en

$$DF(T/f) : D^bF_{qcoh}(T/X) \longrightarrow D^bF_{qcoh}(T/Y) .$$

D'autre part, comme $F : T^*Y \times_Y X \longrightarrow T^*X$ est lisse, de dimension relative $-d_f$, et que

$$\omega_{T^*Y \times_Y X/T^*X} = (\pi_f)^* \omega_{X/Y}$$

(cf. [6] III, §1), on a (cf. [6] III, §2)

$$F_T^!(-)[d_f] = F_T^*(-) \otimes_{\mathcal{O}_T} \alpha^* \omega_{X/Y}$$

de sorte que, pour tout $\mathcal{G}^\cdot \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{qcoh}}(\alpha^*\ \mathrm{gr}\ \mathcal{O}_X)$, on a

$$[(\beta^*\ \mathrm{gr}\ \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_T} \alpha^* \omega_{X/Y}) \otimes_{\alpha^*\ \mathrm{gr}\ \mathcal{O}_X} \mathcal{G}^\cdot]^\sim = F_T^!(\tilde{\mathcal{G}}^\cdot)[d_f] ;$$

ceci montre que (5.4.1.2) commute.

La commutativité de (5.4.1.1) est immédiate ($\mathcal{O}_{Y \leftarrow X}$ est plat sur $\mathcal{O}_X$) et si f,g sont des immersions fermées, on a un isomorphisme canonique

$$MF(T/g\circ f) \simeq MF(T/g) \circ MF(T/f)$$

(cf. (5.1.6), (5.1.7)), d'où l'isomorphisme (5.4.1.3).

Pour $f : X = Y \times_k X' \longrightarrow Y$, $(y,x') \longmapsto y$, une projection lisse, on notera $p : X \longrightarrow X'$ la seconde projection et $\alpha' = p \circ \alpha$; on définit alors un foncteur

$$CF(T/f) : C^b F_{\mathrm{qcoh}}(T/X) \longrightarrow C^b F_{\mathrm{qcoh}}(T/Y) \quad (5.4.3)$$

ce foncteur envoie $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ sur $(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot)$ avec

$$(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot) = \underline{s}(\mathcal{K}^{\cdot\cdot}, \mathcal{K}_i^{\cdot\cdot})$$

où $\underline{s}$ est le foncteur "complexe simple associé à un complexe double" et où (cf. (5.2.3.1))

$$(\mathcal{K}^{\cdot\cdot}, \mathcal{K}_i^{\cdot\cdot}) = \alpha^{-1}(DR_{X/Y}(\mathcal{O}_X), DR_{X/Y}(\mathcal{O}_X)_i) \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} (\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) ;$$

plus précisément, pour tout bidegré $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a

$$\mathcal{K}^{p,q} = \alpha^{-1}\, \Omega^{p-d}_{X/Y} \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^q = \alpha'^{-1}\, \Omega^{p-d}_{X'/k} \otimes_{\alpha'^{-1}\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{M}^q$$

$$\mathcal{K}_i^{p,q} = \alpha^{-1}\, \Omega^{p-d}_{X/Y} \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^q_{i-d+p} = \alpha'^{-1}\, \Omega^{p-d}_{X'/k} \otimes_{\alpha'^{-1}\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{M}^q_{i-d+p}$$

où $d = d_f$, la différentielle de $\mathcal{K}^{p,\cdot} = \alpha^{-1}\, \Omega^{p-d}_{X/Y} \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^\cdot$ provenant de celle de $\mathcal{M}^\cdot$ et la différentielle de $\mathcal{K}^{\cdot,q} = \alpha^{-1}\, DR_{X/Y}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^q$

de celle de $DR_{X/Y}(\mathcal{O}_X)$; comme $\Omega^{p-d}_{X'/k}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module localement libre de rang fini, $K^{p,q}_i$ est bien un sous-objet de $K^{p,q}$; de plus, il résulte de 5.2.4 que chaque $(K^{p,q}, K^{p,q}_i)$ est un $\beta^{-1}\mathcal{O}_Y$-Module filtré et que les deux différentielles de $K^{\cdot\cdot}$ sont $\beta^{-1}\mathcal{O}_Y$-linéaires. Toujours par $\mathcal{O}_{X'}$-platitude de $\Omega^{p-d}_{X'/k}$, on a

$$\mathrm{gr}.K^{p,q} = \alpha^{-1}\Omega^{p-d}_{X/Y} \otimes_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}.\mathcal{M}^q(p-d) = \alpha'^{-1}\Omega^{p-d}_{X'/k} \otimes_{\alpha'^{-1}\mathcal{O}_{X'}} \mathrm{gr}.\mathcal{M}^q(p-d)$$

et, comme $\mathrm{gr}.\mathcal{M}^q$ est un $\alpha^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$-Module gradué par hypothèse, on a en fait

$$\mathrm{gr}.K^{p,q} = \alpha^*\Omega^{p-d}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathrm{gr}.\mathcal{M}^q(p-d) = \alpha'^*\Omega^{p-d}_{X'/k} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathrm{gr}.\mathcal{M}^q(p-d)$$

ce qui met en évidence une structure canonique de $\beta^*\,\mathrm{gr}.\,\mathcal{D}_Y$-Module gradué quasi-cohérent sur $\mathrm{gr}.K^{p,q}$; on se convaincra facilement que les différentielles de $\mathrm{gr}\,K^{\cdot\cdot}$ sont $\beta^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_Y$-linéaires. On déduit de tout cela que $(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}^\cdot_i)$ est un complexe de $\beta^{-1}\mathcal{D}_Y$-Modules filtrés et que $\mathrm{gr}.\,\mathcal{N}^\cdot$ a une structure canonique de complexe de $\beta^*\,\mathrm{gr}.\,\mathcal{D}_Y$-Modules gradués qui prolonge celle de $\beta^{-1}\,\mathrm{gr}.\,\mathcal{D}_Y$-Module, ce qui achève la construction de $CF(T/f)$.

Le foncteur $CF(T/f)$ se dérive trivialement (cf. 1.6.2, 5.3.6 et l'exactitude du foncteur $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}^q \longmapsto \mathrm{gr}\,K^{pq}$) en

$$DF(T/f) \,/\, D^b F_{qcoh}(T/X) \longrightarrow D^b F_{qcoh}(T/Y)\ .$$

D'autre part, on a encore pour tout bidegré (p,q),

$$\mathrm{gr}\,K^{p,q} = \alpha^*(\Omega^{p-d}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X(p-d)) \otimes_{\alpha^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X} \mathrm{gr}\,\mathcal{M}^q$$

et

$$\Omega^{\cdot-d}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X(p-d) \longrightarrow \mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = f^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/Y}$$

est une résolution localement libre (de type fini) du $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$-Module $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = f^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/Y}$ (cf. 5.2.3.4) ; donc, dans $D^b_{qcoh}(\beta^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_Y)$, on a

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{N}^\cdot \xrightarrow{\sim} (\beta^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_T} \alpha^*\omega_{X/Y}) \overset{L}{\otimes}_{\alpha^*\,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X} \mathrm{gr}\,\mathcal{M}^\cdot\ ;$$

comme $F : T^*Y \times_Y X \hookrightarrow T^*X$ est une immersion régulière de codimension $d = d_f$, F_T aussi, et comme

$$\omega_{T^*Y\times_Y X/T^*X} = (\pi_f)^*\omega_{X/Y}$$

(cf. [6] III, §1), on a (cf. [6] III, 7.3)

$$F_T^!(-)[d_f] = LF_T^*(-)\otimes_{\mathcal{O}_T} \alpha^*\omega_{X/Y} ,$$

de sorte que, pour tout $\mathcal{G}^\cdot \in \mathrm{ob}\, D^b_{qcoh}(\alpha^*\ \mathrm{gr}\ \mathcal{O}_X)$, on a

$$[(\beta^*\ \mathrm{gr}\ \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_T} \alpha^*\omega_{X/Y})\overset{L}{\otimes}_{\alpha^*\ \mathrm{gr}\ \mathcal{O}_X} \mathcal{G}^\cdot]^\sim = F_T^!(\tilde{\mathcal{G}}^\cdot)[d_f] ;$$

tout ceci montre que (5.4.1.2) commute.

La commutativité de (5.4.1.1) résulte facilement de 5.2.3.4. Enfin, si $g : Y = Z \times_k Y' \longrightarrow Z$, $(z,y') \longmapsto z$ est une deuxième projection lisse, on a un isomorphisme canonique

$$CF(T/g\circ f) \simeq CF(T/g)\circ CF(T/f) ,$$

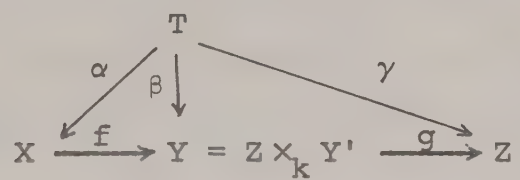
car

$$\Omega^\cdot_{Z'\times_k Y'/k} = \underline{s}(pr_{Z'}^*\ \Omega^\cdot_{Z'/k} \otimes_{\mathcal{O}_{Z\times_k Y'}} pr_{Y'}^*\ \Omega^\cdot_{Y'/k}) ,$$

d'où l'isomorphisme (5.4.1.3).

Pour définir $DF(T/f)$ dans le cas général nous aurons besoin du lemme suivant

LEMME 5.4.4. <u>Pour tout diagramme commutatif de morphismes de schémas</u>



<u>où</u> g <u>est une projection lisse</u> $(g(z,y') = z)$ <u>et où</u> f <u>et</u> $h = g\circ f$ <u>sont des immersions fermées, on a un morphisme canonique de foncteurs</u>

$$CF(T/g)\circ CF(T/f) \longrightarrow CF(T/h) ,$$

<u>où</u> $CF(T/g)$ <u>est défini en</u> (5.4.3) <u>et où</u> $CF(T/f)$, $CF(T/h)$ <u>sont les prolongements naturels à</u> $C^bF_{qcoh}(T/X)$ <u>de</u> $MF(T/f)$, $MF(T/h)$ <u>respectivement</u> (cf. (5.4.2)), <u>et ce morphisme de foncteurs induit un isomorphisme de foncteurs</u>

$$DF(T/g)\circ DF(T/f) \xrightarrow{\sim} DF(T/h)$$

<u>de</u> $D^bF_{qcoh}(T/X)$ <u>dans</u> $D^bF_{qcoh}(T/Y)$.

<u>Preuve</u>. Il suffit essentiellement de définir la flèche car pour vérifier qu'un morphisme entre foncteurs de $D^bF_{qcoh}(T/X)$ dans $D^bF_{qcoh}(T/Y)$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que ce morphisme induit, par passage aux gradués, un isomorphisme de $D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X\times_X T})$ dans

$D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*Y \times_Y T})$, ce qui ramène l'assertion à [6] III 8.2.

Définissons donc la flèche : on a un isomorphisme canonique (cf. (5.1.6))

$$\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} = f^{-1}\,\mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow X}$$

et une résolution localement libre du $\mathcal{D}_Y$-Module $\mathcal{D}_{Z \leftarrow Y}$ (cf. 5.2.3.4)

$$DR_{Y/Z}(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow \mathcal{D}_{Z \leftarrow Y}$$

d'où une flèche

$$f^{-1}\,DR_{Y/Z}(\mathcal{D}_Y) \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \longrightarrow \mathcal{D}_{Z \leftarrow X}$$

qui induit la flèche cherchée.

On achève alors la construction de $DF(T/f)$, pour $f : X \longrightarrow Y$ arbitraire, en factorisant f en

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ i\ } & Y \times_k X \\ & \searrow^{f} & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

où i est le graphe de f $(i(x) = (f(x),x))$ et où π est la projection canonique $(\pi(y,x) = y)$, puis en posant

$$DF(T/f) = DF(T/\pi) \circ DF(T/i) : D^b F_{qcoh}(T/X) \longrightarrow D^b F_{qcoh}(T/Y)\ ;$$

il résulte de 5.4.4 que, pour tout autre factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ i'\ } & Y \times_k X' \\ & \searrow^{f} & \downarrow \pi' \\ & & Y \end{array}$$

de f en une immersion fermée i', suivie d'une projection π', on a un isomorphisme canonique

$$DF(T/f) \simeq DF(T/\pi') \circ DF(T/i')$$

et, en particulier, la définition générale de $DF(T/f)$ ci-dessus ne rentre pas en conflit avec les définitions déjà données dans le cas où f est une immersion fermée et dans le cas où f est une projection lisse.

De plus, il résulte de (5.1.6) (resp. de [6] III, 8.7) et des cas déjà traités que (5.4.1.1) (resp. (5.4.1.2)) commute.

Il reste à vérifier (5.4.1.3) et pour cela à démontrer le lemme ci-dessous :

LEMME 5.4.5. Pour tout carré cartésien de morphismes de schémas

$$\begin{array}{ccc} X = Y \times_k X' & \xrightarrow{i} & X_1 = Y_1 \times_k X' \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ Y & \xrightarrow{j} & Y_1 \end{array}$$

où i,j sont des immersions fermées et où f, f_1 sont des projections lisses, et pour tout morphisme de schémas $T \longrightarrow X$, on a un morphisme canonique de foncteurs

$$CF(T/j) \circ CF(T/f) \longrightarrow CF(T/f_1) \circ CF(T/i) ,$$

où $CF(T/f), CF(T/f_1)$ sont définis en (5.4.3) et où $CF(T/i)$, $CF(T/j)$ sont les prolongements naturels à $C^bF_{qcoh}(T/X)$, $C^bF_{qcoh}(T/Y)$ des foncteurs $MF(T/i)$, $MF(T/j)$ respectivement (cf. (5.4.2)), et ce morphisme de foncteurs induit un isomorphisme de foncteurs

$$DF(T/j) \circ DF(T/f) \longrightarrow DF(T/f_1) \circ DF(T/i)$$

de $D^bF_{qcoh}(T/X)$ dans $D^bF_{qcoh}(T/Y_1)$.

Preuve. Il suffit de définir la flèche (cf. 5.4.4 et [6] III 6.4). Or, on a un isomorphisme canonique

$$f^{-1}\mathcal{O}_{Y_1} \leftarrow Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_1} \leftarrow X$$

d'où on déduit facilement la flèche cherchée.

5.5. Etudions maintenant une fonctorialité de $D^bF_{qcoh}(X/Y)$ par rapport à X :

Construction 5.5.1. Pour tout triangle commutatif de morphismes de schémas, avec f séparé,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & {\scriptstyle a}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle b} & \\ & S & \end{array}$$

il existe un foncteur

$$DF(f/S) : D^b F_{qcoh}(X/S) \longrightarrow D^b F_{qcoh}(Y/S)$$

tel que les carrés de foncteurs ci-dessous "commutent" :

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(X/S) & \xrightarrow{DF(f/S)} & D^b F_{qcoh}(Y/S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^b_{qcoh}(a^{-1}\mathcal{O}_S) & \xrightarrow{Rf_*} & D^b_{qcoh}(b^{-1}\mathcal{O}_S) \end{array} \tag{5.5.1.1}$$

où les flèches verticales sont les flèches "d'oubli de la filtration", et

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(X/S) & \xrightarrow{DF(f/S)} & D^b F_{qcoh}(Y/S) \\ \widetilde{gr} \downarrow & & \downarrow \widetilde{gr} \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*S} \times_S X) & \xrightarrow{R\bar{f}_*} & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*S} \times_S Y) \end{array} \tag{5.5.1.2}$$

où

$$\bar{f} = id_{T^*S} \times_S f : T^*S \times_S X \longrightarrow T^*S \times_S Y \ .$$

De plus, pour tout diagramme commutatif de morphismes de schémas, avec f et g séparés,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow^{a} & \downarrow b & \swarrow_{c} & \\ & & S & & \end{array}$$

on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$DF(g \circ f/S) \simeq DF(g/S) \circ DF(S/f) \tag{5.5.1.3}$$

qui vérifie la condition de cocycle usuelle.

On définira $DF(f/S)$ à la $\overset{\vee}{\text{C}}$ech. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts de X, affines sur Y et soit

$$X_\cdot \xrightarrow{\varepsilon_\cdot} X$$

l'hyperrecouvrement de X associé à $(U_i)_{i \in I}$: pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$X_n = \coprod_{i_0, \ldots, i_n \in I} U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}$$

soit encore

$$X_0 = \coprod_{i \in I} U_i \xrightarrow{\varepsilon_0} X$$

$$X_n = X_o \times_X X_o \times_X \cdots \times_X X_o$$

où ε_o est la projection canonique et où il y a $n+1$ copies de X_o, les flèches $X_n \longrightarrow X_{n-1}$ étant les $n+1$ projections canoniques et $\varepsilon_n : X_n \longrightarrow X$ étant la projection canonique sur X. Par hypothèse, f est séparé donc chaque X_n est affine sur Y, via $f_n = f \circ \varepsilon_n$.

Associons à u le foncteur

$$(5.5.2) \qquad CF(f/S,u) : C^b F_{qcoh}(X/S) \longrightarrow C^b F_{qcoh}(Y/S)$$

qui envoie $(\mathscr{M}^\cdot, \mathscr{M}_i^\cdot)$ sur $(\mathscr{N}^\cdot, \mathscr{N}_i^\cdot)$ avec

$$(\mathscr{N}^\cdot, \mathscr{N}_i^\cdot) = \underline{s}(\mathscr{K}^{\cdot\cdot}, \mathscr{K}_i^{\cdot\cdot})$$

où $\underline{s}$ est le foncteur "complexe simple associé à un complexe double" et où

$$(\mathscr{K}^{\cdot\cdot}, \mathscr{K}_i^{\cdot\cdot}) = f_{\cdot *}\, \varepsilon_\cdot^{-1}(\mathscr{M}^\cdot, \mathscr{M}_i^\cdot) \ ;$$

plus précisément, pour tout bidegré $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on a

$$\mathscr{K}^{p,q} = f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathscr{M}^q$$

$$\mathscr{K}_i^{p,q} = f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathscr{M}_i^q$$

et la différentielle de $\mathscr{K}^{p,\cdot} = f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathscr{M}^\cdot$ provient de celle de $\mathscr{M}^\cdot$ et celle de $\mathscr{K}^{\cdot,q}$ est définie de manière usuelle (cf. [6] III, §3). Comme ε_p^{-1} est exact et f_{p*} est exact à gauche sur les faisceaux abéliens, $\mathscr{K}_i^{p,q}$ est bien un sous-objet de $\mathscr{K}^{p,q}$; comme $a^{-1}\, \mathscr{O}_S = f^{-1}(b^{-1}\, \mathscr{O}_S)$, $(\mathscr{K}^{p,q}, \mathscr{K}_i^{p,q})$ est bien un $b^{-1}\, \mathscr{O}_S$-Module filtré ; enfin, on vérifie facilement que les différentielles de $\mathscr{K}^{\cdot\cdot}$ sont $b^{-1}\, \mathscr{O}_S$-linéaires.

De plus, pour tout bi degré $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on a

$$gr.\mathscr{K}^{p,q} = f_{p*}\, \varepsilon_p^*\, gr.\mathscr{M}^q$$

ce qui met en évidence la structure de $\mathscr{O}_Y$-Module quasi-cohérent de $gr.\mathscr{K}^{p,q}$: en effet, on a

$$\varepsilon_p^{-1}\, gr_i\, \mathscr{M}^q = \varepsilon_p^*\, gr_i\, \mathscr{M}^q$$

($\varepsilon_p^{-1}\, \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_{X_p}$ et $gr_i\, \mathscr{M}^q$ a une structure de $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent par hypothèse), donc

$$R^1 f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, gr_i\, \mathcal{M}^q = R^1 f_{p*}\, \varepsilon_p^{*}\, gr_i\, \mathcal{M}^q = 0$$

(le premier $R^1 f_{p*}$ est calculé au sens des faisceaux abéliens et le second au sens des $\mathcal{O}$-Modules ; $\varepsilon_p^{*}\, gr_i\, \mathcal{M}^q$ est $\mathcal{O}_{X_p}$-quasi-cohérent et f_p est affine) ; par suite, la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathcal{M}^q_{i-1} \longrightarrow f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathcal{M}^q_i \longrightarrow f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, gr_i\, \mathcal{M}^q$$

$$\longrightarrow R^1 f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathcal{M}^q_{i-1} \longrightarrow R^1 f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathcal{M}^q_i \longrightarrow R^1 f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, gr_i\, \mathcal{M}^q$$

associée à la suite exacte courte de faisceaux abéliens

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^q_{i-1} \longrightarrow \mathcal{M}^q_i \longrightarrow gr_i\, \mathcal{M}^q \longrightarrow 0$$

montre premièrement, par récurrence sur $i \in \mathbb{Z}$, que

$$R^1 f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, \mathcal{M}^q_i = 0$$

et puis que

$$gr_i\, \mathcal{K}^{p,q} = f_{p*}\, \varepsilon_p^{-1}\, gr_i\, \mathcal{M}^q \qquad (p \in \mathbb{N},\ q, i \in \mathbb{Z})$$

et donc

$$gr.\, \mathcal{K}^{p,q} = f_{p*}\, \varepsilon_p^{*}\, gr.\, \mathcal{M}^q \qquad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z})\ .$$

Il est clair alors que $CF(f/S,u)$ se dérive trivialement (cf. 1.6.2 et 5.3.6) en

$$DF(f/S,u) : D^b F_{qcoh}(X/S) \longrightarrow D^b F_{qcoh}(Y/S)\ ;$$

il résulte de [6] III, 3.3 que les carrés (5.5.1.1) et (5.5.1.2), où on a remplacé $DF(f/S)$ par $DF(f/S,u)$, sont commutatifs.

Il reste à vérifier que $DF(f/S,u)$ ne dépend pas à isomorphisme près du choix de u et (5.5.1.3), ce que nous laisserons au lecteur.

5.6. Nous sommes maintenant en mesure de définir l'analogue filtré de $\int_f$ (cf. 5.0.3).

Construction 5.6.1. Pour tout morphisme séparé de schémas $f : X \longrightarrow Y$, il existe un foncteur

$$\int_f : D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y)$$

tels que les carrés de foncteurs ci-dessous "commutent"

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\int_f} & D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\int_f} & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_Y) \end{array} \tag{5.6.1.1}$$

où les flèches verticales sont les flèches "d'oubli de la filtration", et

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\int_f} & D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y) \\ \widetilde{gr}\downarrow & & \downarrow\widetilde{gr} \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X}) & \xrightarrow{R\bar{f}_*\circ F^!(-)[d_f]} & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*Y}) \end{array} \tag{5.6.1.2}$$

où d_f , F , $\bar{f}$ sont définis en 5.0. De plus, pour tout morphisme séparé $g : Y \longrightarrow Z$, on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\int_{g\circ f} \simeq \int_g \circ \int_f \tag{5.6.1.3}$$

avec la condition de cocycle usuelle.

On définit $\int_f$ comme le foncteur composé de

$$D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_X) = D^b F_{qcoh}(X/X) \xrightarrow{DF(X/f)} D^b F_{qcoh}(X/Y)$$

et de

$$D^b F_{qcoh}(X/Y) \xrightarrow{DF(f/Y)} D^b F_{qcoh}(Y/Y) = D^b F_{qcoh}(\mathcal{O}_Y) \ ;$$

la commutativité de (5.6.1.1) (resp. (5.6.1.2)) résulte de celle de (5.4.1.1) et (5.5.1.1) (resp. (5.4.1.2) et (5.5.1.2)). Il reste à vérifier (5.6.1.3) et pour cela il suffit de montrer le lemme suivant :

LEMME 5.6.2. Pour $f : X \longrightarrow Y$ séparé et $g : Y \longrightarrow Z$ une immersion fermée (resp. une projection lisse) le carré de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(X/Y) & \xrightarrow{DF(X/g)} & D^b F_{qcoh}(X/Z) \\ DF(f/Y)\downarrow & & \downarrow DF(f/Z) \\ D^b F_{qcoh}(Y/Y) & \xrightarrow{DF(Y/g)} & D^b F_{qcoh}(Y/Z) \end{array} \tag{5.6.2.1}$$

est "commutatif".

Preuve. Une fois défini une flèche, ce qui ne pose pas de problème, on est ramené, par passage au gradué, à vérifier que

$$R\bar{f}_* \circ G^! = G^! \circ R\bar{f}_*$$

pour le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T^*Y \times_Y X & \xleftarrow{G} & T^*Z \times_Z X \\ \bar{f}\downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ T^*Y & \xleftarrow{G} & T^*Z \times_Z Y \end{array} .$$

Compte-tenu de [16] IV 3.1.0, du fait que dans les deux cas (g immersion fermée, g lisse) $G^!$ n'est autre à un décalage près que $LG^*(-) \otimes \omega_G$, de la formule des projections pour $\bar{f}$ (cf. [6] II 5.6) et de l'égalité (cf. [6] III 1)

$$\bar{f}^* \omega_{T^*Z \times_Z Y / T^*Y} = \omega_{T^*Z \times_Z X / T^*Y \times_Y X}$$

on est ramené à montrer la Tor-indépendance de $\bar{f} : T^*Y \times_Y X \longrightarrow T^*Y$ et de $G : T^*Z \times_Z Y \longrightarrow T^*Y$ (cf. [16] III 1.5); cette Tor-indépendance est immédiate quand G est plat, donc en particulier quand g est une immersion fermée ; d'autre part, si f est plat, on a encore $\bar{f}$ plat et la Tor-indépendance voulue ; par dévissage sur f, on est donc ramené à supposer que f est une immersion fermée, donc $\bar{f}$ aussi ; supposons donc que f est une immersion fermée et que g est lisse de sorte que $\bar{f}$ et G sont des immersions fermées, d'après [16] VII 2.5, il suffit de vérifier que

$$\mathcal{I}.\mathcal{J} = \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$$

où $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) est le $\mathcal{O}_{T^*Y}$-Idéal définissant $T^*Y \times_Y X$ (resp. $T^*Z \times_Z Y$), ce qui localement sur Y est facile.

THÉORÈME 5.6.3. Si $f : X \longrightarrow Y$ est propre, le foncteur $\int_f$ défini en 5.6.1 transforme objets parfaits en objets parfaits et donc induit un foncteur de $D^b F_{parf}(\mathcal{O}_X)$ dans $D^b F_{parf}(\mathcal{O}_Y)$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la commutativité de (5.6.1.2), de (4.4.3) et de [6] VII 3.4 et II 2.2.

5.7. Comme première application de 5.6.3, nous retrouvons la cohérence des "images directes supérieures" d'un $\mathcal{O}$-Module cohérent (cf. [7] 4.2).

PROPOSITION 5.7.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, alors les $\mathcal{O}_Y$-Modules

$$\int_f^n \mathcal{M} = R^n f_*(\mathcal{O}_{Y \leftarrow X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \qquad (n \geqslant 0)$$

sont eux aussi cohérents.

Preuve. S'il existe une filtration $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ telle que $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, on a d'après 5.6.3, $\int_f (\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ D^bF_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ et donc, d'après 4.3.2, les $H^n(\int_f (\mathcal{M},\mathcal{M}_i))$ sont dans $MF_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ $(n \geqslant 0)$; a fortiori, les $\mathcal{D}_Y$-Modules sous-jacents aux $H^n(\int_f (\mathcal{M},\mathcal{M}_i))$, i.e. les $\int_f^n \mathcal{M}$ $(n \geqslant 0)$ sont cohérents. Il nous reste donc à rappeler le résultat suivant, dû à Deligne :

LEMME 5.7.2. Pour tout $\mathcal{D}_X$-Module cohérent $\mathcal{M}$, il existe une filtration $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ par des sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents telle que $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ soit un objet de $MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$.

Preuve. $\mathcal{M}$ étant $\mathcal{D}_X$-cohérent, $\mathcal{M}$ est a fortiori $\mathcal{D}_X$-quasi-cohérent et donc $\mathcal{O}_X$-quasi-cohérent ; comme X est noethérien, $\mathcal{M}$ est limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_X$-Modules cohérents, donc, il existe un sous-$\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{M}_o$ de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{D}_X.\mathcal{M}_o = \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ est $\mathcal{D}_X$-cohérent et limite inductive des $\mathcal{D}_X.\mathcal{M}_o$ pour $\mathcal{M}_o$ parcourant les sous-$\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de $\mathcal{M}$). Maintenant la filtration

$$\mathcal{M}_i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < 0 \\ \mathcal{D}_{X,i}.\mathcal{M}_o & \text{pour } i \geqslant 0 \end{cases}$$

répond à la question (cf. (4.4.1)).

COROLLAIRE 5.7.3. Pour tout morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ le foncteur $\int_f : D_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D_{qcoh}(\mathcal{D}_Y)$ envoie $D^b_{parf}(\mathcal{D}_X)$ dans $D^b_{parf}(\mathcal{D}_Y)$.

Remarque 5.8. Même remarque qu'en 4.5.

6. THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH POUR LES $\mathscr{D}$-MODULES.

6.0. Comme au numéro 5 , tous les schémas considérés ici sont des schémas séparés, de type fini sur un corps k de caractéristique 0 et tous les morphismes de schémas sont des k-morphismes séparés. On utilisera librement les notations de 5.0.

Pour toute catégorie triangulée T , on note $k(T)$ le groupe de Grothendieck de T qui classifie les applications additives de $\mathrm{ob}\, T$ dans un groupe abélien (cf. [16] IV, 1.1) ; pour toute catégorie exacte $\mathcal{C}$ et pour toute sous-catégorie pleine C de $\mathcal{C}$ stable par sommes finies, on note $k(C,\mathcal{C})$ le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée $K^b(C)/K^{b,\phi}(C)$ où $K^{b,\phi}(C) = K^b(C) \cap K^{b,\phi}(\mathcal{C})$ (cf. 1.2.6 et [16] IV, 1.5).

Pour tout schéma X , on posera

$$KF(\mathscr{D}_X) = k(D^b F_{parf}(\mathscr{D}_X)) , \tag{6.0.1}$$

$$KF(\mathscr{D}_X)_{naif} = k(MF_{parf}(\mathscr{D}_X), MF_{qcoh}(\mathscr{D}_X)) , \tag{6.0.2}$$

$$K(\mathscr{O}_{T^*X}) = k(D^b_{parf}(\mathscr{O}_{T^*X})) , \tag{6.0.3}$$

$$K(\mathscr{O}_{T^*X})_{naïf} = k(M_{parf}(\mathscr{O}_{T^*X}), M_{qcoh}(\mathscr{O}_{T^*X})) , \tag{6.0.4}$$

$$K(\mathscr{D}_X) = k(D^b_{parf}(\mathscr{D}_X)) , \tag{6.0.5}$$

$$K(\mathscr{D}_X)_{naïf} = k(M_{parf}(\mathscr{D}_X), M_{qcoh}(\mathscr{D}_X)) ; \tag{6.0.6}$$

on a alors un diagramme commutatif d'homomorphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} K(\mathscr{D}_X)_{naïf} & \xrightarrow{\sim} & K(\mathscr{D}_X) \\ \omega \uparrow & & \uparrow \omega \\ KF(\mathscr{D}_X)_{naïf} & \longrightarrow & KF(\mathscr{D}_X) \\ \widetilde{gr} \downarrow & & \downarrow \widetilde{gr} \\ K(\mathscr{O}_{T^*X})_{naïf} & \xrightarrow{\sim} & K(\mathscr{O}_{T^*X}) \end{array} \tag{6.0.7}$$

où les homomorphismes ω et $\widetilde{gr}$ sont respectivement induits par les foncteurs "oubli de la filtration" et "gradué associé" (cf. (3.1.4) et (4.0.6) et où les flèches horizontales sont induites par les foncteurs inclusions, la première et la troisième étant des isomorphismes (cf. [16] IV, 2.4 et 2.5).

6.1. On se propose de définir, pour tout schéma X, un homomorphisme de groupes

$$\text{Car} : K(\mathcal{D}_X) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X}) \tag{6.1.1}$$

tel que

$$\widetilde{\text{gr}} = \text{Car} \circ w : KF(\mathcal{D}_X) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X}) .$$

LEMME 6.1.2. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent et soient $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(\mathcal{M}'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ deux filtrations de $\mathcal{M}$ par des sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents telles que $(\mathcal{M},\mathcal{M}'_i)$ et $(\mathcal{M},\mathcal{M}''_i)$ soient des objets de $MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, alors $\widetilde{\text{gr}}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ et $\widetilde{\text{gr}}(\mathcal{M},\mathcal{M}'_i)$ coïncident dans $K(\mathcal{O}_{T^*X})_{naïf}$.*

Preuve. Il existe $r,s \geqslant 0$ tels que

$$\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}'_{i+r} \subset \mathcal{M}_{i+r+s}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (si X est affine, ce n'est autre que [3] ch. 2, 6.1 ; le cas général en résulte car X est quasi-compact). Quitte à remplacer $\mathcal{M}'_i$ par $\mathcal{M}'_{i+r}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ce qui ne change pas $\widetilde{\text{gr}}(\mathcal{M},\mathcal{M}'_i)$, on peut supposer $r = 0$; le cas essentiel est maintenant $s = 1$ (cf. [3] ch. 2, preuve de 6.2). Alors, pour $r = 0$, $s = 1$, on a des suites exactes de gr $\mathcal{D}_X$-Modules cohérents

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (\mathcal{M}'_{i-1}/\mathcal{M}_{i-1}) \longrightarrow \text{gr}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (\mathcal{M}_i/\mathcal{M}'_{i-1}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (\mathcal{M}_i/\mathcal{M}'_{i-1}) \longrightarrow \text{gr}(\mathcal{M},\mathcal{M}'_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (\mathcal{M}'_i/\mathcal{M}_i) \longrightarrow 0$$

(cf. 4.0.7 (ii)), d'où la conclusion.

Compte-tenu de 5.7.2, le lemme ci-dessus permet de définir une application

$$\text{Car} : \text{ob}\, M_{parf}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X})_{naïf} \tag{6.1.2.1}$$

dont la composée avec ω est $\widetilde{\text{gr}} : \text{ob}\, MF_{parf}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X})_{naïf}$.

LEMME 6.1.3. *L'application* Car *ci-dessus est additive*.

Preuve. Comme $M_{parf}(\mathcal{D}_X)$ est une sous-catégorie épaisse de $M_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, il s'agit de vérifier que pour toute suite exacte de $\mathcal{D}_X$-Modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \xrightarrow{u} \mathcal{M} \xrightarrow{v} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

on a

$$\mathrm{Car}\ \mathcal{M} = \mathrm{Car}\ \mathcal{M}' + \mathrm{Car}\ \mathcal{M}'' .$$

Soit donc $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une filtration de $\mathcal{M}$ par des sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents telle que $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ soit dans $\mathrm{MF}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X)$; on filtre $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ par

$$\mathcal{M}'_i = u^{-1}(\mathcal{M}_i) \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

et

$$\mathcal{M}''_i = v(\mathcal{M}_i) \qquad (i \in \mathbb{Z}) ;$$

alors on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}\ \mathcal{M}' \longrightarrow \mathrm{gr}\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{gr}\ \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

de $\mathrm{gr}\ \mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, ce qui montre premièrement que $\mathrm{gr}\ \mathcal{M}'$ et $\mathrm{gr}\ \mathcal{M}''$ sont $\mathrm{gr}\ \mathcal{O}_X$-cohérents (cf. 4.0.7 (ii)) puis la formule annoncée pour $\mathrm{Car}\ \mathcal{M}$.

On a donc défini un homomorphisme de groupes

(6.1.3.1) $$\mathrm{Car} : K(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{naïf}} \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X})_{\mathrm{naïf}}$$

dont le composé avec ω est $\widetilde{\mathrm{gr}} : KF(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{naïf}} \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X})_{\mathrm{naïf}}$; compte-tenu de (6.0.7), cet homomorphisme Car induit un homomorphisme (6.1.1) et il reste à vérifier que $\mathrm{Car}\circ\omega : KF(\mathcal{O}_X) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X})$ coïncide avec $\widetilde{\mathrm{gr}}$. Pour cela, il suffit de vérifier le lemme suivant

LEMME 6.1.4. Pour tout objet $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$ de $D^b\mathrm{F}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X)$, on a

$$\sum_n (-1)^n\ \widetilde{\mathrm{gr}}(H^n(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)) = \sum_n (-1)^n\ H^n(\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathcal{M}^\cdot)$$

dans $K(\mathcal{O}_{T^*X})_{\mathrm{naïf}}$.

Preuve. On a $H^n(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) = H^0(H^n_\tau(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot))$ (cf. 3.5.3) et

$$(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) = \sum_n (-1)^n\ H^n_\tau(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot)$$

dans $KF(\mathcal{O}_X)$ (cf. 1.4.1) ; par suite, il suffit de montrer le lemme pour $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) \in \mathrm{ob}\ \mathrm{AF}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X)$ (cf. 4.4.3), auquel cas la conclusion résulte de 4.3.1.

LEMME 6.1.5. L'homomorphisme de groupes

$$\omega : KF(\mathcal{O}_X) \longrightarrow K(\mathcal{O}_X)$$

est surjectif.

Preuve. D'après (6.0.7), il suffit de montrer que

$$\omega : KF(\mathcal{D}_X)_{naïf} \longrightarrow K(\mathcal{D}_X)_{naïf}$$

est surjectif, ce qui résulte aussitôt de 5.7.2.

En résumé, on a montré :

PROPOSITION 6.1.6. Pour tout schéma X, l'homomorphisme de groupes

$$\omega : KF(\mathcal{D}_X) \longrightarrow K(\mathcal{D}_X)$$

est surjectif et $\widetilde{gr} : KF(\mathcal{D}_X) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*X})$ se factorise, nécessairement de façon unique, à travers ω : le triangle

$$\begin{array}{ccc} & KF(\mathcal{D}_X) & \\ {\scriptstyle\omega}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\widetilde{gr}} \\ K(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{\text{Car}} & K(\mathcal{O}_{T^*X}) \end{array}$$

est commutatif.

6.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre de schémas, alors $\int_f : D^b F_{parf}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^b F_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ (cf. 5.6.1) induit un homomorphisme de groupes

$$\int_f : KF(\mathcal{D}_X) \longrightarrow KF(\mathcal{D}_Y) ;$$

de même, on a des homomorphismes de groupes

$$\int_f : K(\mathcal{D}_X) \longrightarrow K(\mathcal{D}_Y)$$

et

$$(-1)^{d_f} \bar{f}_* \circ F^! : K(\mathcal{O}_{T^*X}) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*Y})$$

où $F^! : K(\mathcal{O}_{T^*X}) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*Y \times_Y X})$ est induit par $F^!$ et $\bar{f}_* : K(\mathcal{O}_{T^*Y \times_Y X}) \longrightarrow K(\mathcal{O}_{T^*Y})$ est induit par $R\bar{f}_*$. Comme conséquence de 5.6.1, on a

PROPOSITION 6.2.1. Pour tout morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$, le diagramme d'homomorphismes de groupes

(6.2.1.1)
$$\mathrm{Car}\left(\begin{array}{ccc} K(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\int_f} & K(\mathcal{O}_Y) \\ \omega \uparrow & & \uparrow \omega \\ KF(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\int_f} & KF(\mathcal{O}_Y) \\ \widetilde{gr} \downarrow & & \downarrow \widetilde{gr} \\ K(\mathcal{O}_{T*X}) & \xrightarrow{(-1)^{d_f}\, \bar{f}_* \circ F^!} & K(\mathcal{O}_{T*Y}) \end{array}\right)\mathrm{Car}$$

est commutatif.

6.3. Nous supposerons dans la suite tous les schémas considérés quasi-projectifs sur k (et toujours, bien entendu, lisse sur k, k de caractéristique 0).

Pour tout schéma T, on notera

$$A(T) = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n(T)$$

son groupe de Chow, gradué par la dimension des cycles et on notera

$$\tau_T : K(\mathcal{O}_T) \longrightarrow A(T) \otimes \mathbb{Q}$$

l'homomorphisme de Riemann-Roch pour T (cf. [1] ou [12] ou [16] 0 et VIII) ; rappelons que (mêmes références) :

- pour tout morphisme propre $f : T \longrightarrow S$ et pour tout $\beta \in K(\mathcal{O}_T)$, on a

$$\tau_S(f_*\beta) = f_*\, \tau_T(\beta)$$

- pour tout morphisme $f : T \longrightarrow S$ (nécessairement localement d'intersection complète, vu nos hypothèses sur T et S) et pour tout $\alpha \in K(\mathcal{O}_S)$, on a

$$\tau_T(f^*\alpha) = f^*\tau_S(\alpha) \,.\, \mathrm{Todd}(\mathcal{T}_f)$$

où $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_T - f^*\mathcal{T}_S \in K(\mathcal{O}_T)$ est le fibré tangent virtuel de f

- pour tout $\beta \in K(\mathcal{O}_T)$ et pour tout $\mathcal{O}_T$-Module inversible ω, on a

$$\tau_T(\beta \otimes \omega) = \tau_T(\beta).\mathrm{Ch}(\omega) \,.$$

On déduit aussitôt de ces propriétés que, pour tout morphisme $f : T \longrightarrow S$ et tout $\alpha \in K(\mathcal{O}_S)$,

$$\tau_T((-1)^{d_f}.f^!\alpha) = f^*\tau_S(\alpha) \,.\, \mathrm{Ch}(\omega_{T/S}).\mathrm{Todd}(\mathcal{T}_f) \;;$$

de plus, un calcul facile montre que

$$Ch(\omega_{T/S}).Todd(\mathcal{C}_f) = Todd(\Omega_f)$$

où $\Omega_f = \Omega^1_{T/k} - f^*\Omega^1_{S/k} \in K(\mathcal{O}_T)$ est le fibré cotangent virtuel de f.

LEMME 6.3.1. Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, on a

$$\Omega_F = -\pi_f^* \mathcal{C}_f$$

dans $K(\mathcal{O}_{T^*Y \times_Y X})$.

Preuve. On a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \pi_X^* \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{T^*X/k} \longrightarrow \Omega^1_{T^*X/X} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pi_f^* \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{T^*Y \times_Y X/k} \longrightarrow \Omega^1_{T^*Y \times_Y X/X} \longrightarrow 0$$

et de plus

$$\Omega^1_{T^*X/X} = \pi_X^* \mathcal{C}_X \quad , \quad \Omega^1_{T^*Y \times_Y X/X} = \pi_f^* f^* \mathcal{C}_Y$$

d'où la conclusion.

PROPOSITION 6.3.2. Pour tout morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$, le carré d'homomorphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{O}_{T^*X}) & \xrightarrow{(-1)^{d_f}.\bar{f}_*\circ F^!} & K(\mathcal{O}_{T^*Y}) \\ {\scriptstyle \tau_{T^*X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{T^*Y}} \\ A(T^*X) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\bar{f}_*\circ F^*(-).Todd(\pi_f^*\mathcal{C}_f)^{-1}} & A(T^*Y) \otimes \mathbb{Q} \end{array} \qquad (6.3.2.1)$$

est commutatif.

COROLLAIRE 6.3.3. Pour tout morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$, le carré d'homomorphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{L}_X) & \xrightarrow{\int_f} & K(\mathcal{O}_Y) \\ {\scriptstyle \tau_{T^*X}\circ Car}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{T^*Y}\circ Car} \\ A(T^*X) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\bar{f}_*\circ F^*(-).Todd(\pi_f^*\mathcal{C}_f)^{-1}} & A(T^*Y) \otimes \mathbb{Q} \end{array} \qquad (6.3.3.1)$$

est commutatif.

6.4. Soit X un schéma projectif et lisse sur k ; notons

$$\sigma : X \longrightarrow T^*X$$

la section nulle du fibré cotangent à X ,

$$(-)_o : A(X) \longrightarrow A_o(X)$$

le projecteur canonique sur la composante de degré 0 et

$$\deg : A_o(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

l'application "degré d'un 0-cycle" ; notons encore $(-)_o$ et deg les extensions naturelles de $(-)_o$ à $A(X)\otimes\mathbb{Q}$ et deg à $A_o(X)\otimes\mathbb{Q}$.

Pour tout $\mathcal{D}_X$-Module cohérent $\mathcal{M}$, on dispose de son complexe de De Rham

$$DR_{X/k}(\mathcal{M}) = DR_{X/k}(\mathcal{D}_X)\otimes_{\mathcal{D}_X}\mathcal{M}$$

(cf. 5.2.3), soit

$$DR_{X/k}(\mathcal{M}) = [\mathcal{M} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M} \dashrightarrow \Omega^{d_X}_{X/k}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}]$$

avec $\Omega^{d_X}_{X/k}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}$ placé en degré 0 , et on a

$$\int_f \mathcal{M} = R\Gamma(X, DR_{X/k}(\mathcal{M})) \tag{6.4.1}$$

dans $D^b_{parf}(k)$, pour $f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural.

Pour $Y = \mathrm{Spec}(k)$ et le morphisme $f : X \longrightarrow Y$ ci-dessus, le corollaire 6.3.3 se réécrit.

PROPOSITION 6.4.2. Pour tout $\mathcal{D}_X$-Module cohérent, on a l'égalité

$$\chi(R\Gamma(X, DR_{X/k}(\mathcal{M}))) = \deg[(\sigma^*(\tau_{T^*X}\circ Car(\mathcal{M})).\mathrm{Todd}(\mathcal{T}_X)^{-1})_o] ,$$

où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré.

6.5. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent (X étant comme en 6.4), appliquons 6.4.2 au $\mathcal{D}_X$-Module cohérent $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$.

Comme $(\mathcal{D}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} , \mathcal{D}_{X,i}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})$ est un $\mathcal{D}_X$-Module filtré quasi-cohérent de gradué

$$\widetilde{gr}(\mathcal{D}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}) = \pi^*\mathcal{F} ,$$

on a

$$Car(\mathcal{M}) = \pi^*\mathcal{F}$$

dans $K(\mathcal{O}_{T^*X})$.

Comme $DR_{X/k}(\mathcal{D}_X)$ est un complexe de $\mathcal{D}_X$-Modules à droite libres de type fini, muni d'une augmentation

$$DR_{X/k}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \omega_X$$

vers le $\mathcal{D}_X$-Module à droite ω_X, qui en fait une résolution à gauche (cf. (5.2.3.3)), on a

$$R\Gamma(X, DR_{X/k}(\mathcal{M})) = R\Gamma(X, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) .$$

Enfin, on a

$$\mathcal{C}_\sigma = -\Omega^1_{X/k}$$

et

$$\mathrm{Todd}(\Omega^1_{X/k}).\mathrm{Todd}(\mathcal{C}_X)^{-1} = \mathrm{Ch}(\omega_X) .$$

Par suite, pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$, 6.4.2 dit simplement que

$$\chi(R\Gamma(X, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})) = \deg[(\tau_X(\mathcal{F}).\mathrm{Ch}(\omega_X))_o] ;$$

en d'autres termes, la formule de Riemann-Roch usuelle est un cas particulier de 6.4.2.

6.6. Soit T un schéma de type fini sur k et soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_T$-Module cohérent, son support est un fermé $\mathrm{Supp}(\mathcal{G})$ de T, de dimension notée $d(\mathcal{G})$; pour tout entier n, on note $\mathrm{Fil}_n K(\mathcal{O}_T)$ le sous-groupe de $K(\mathcal{O}_T)$ engendré par les classes des $\mathcal{G}$ avec $d(\mathcal{G}) \leqslant n$. On a une application linéaire (cf. [12] 1)

$$Z_n : \mathrm{Fil}_n(\mathcal{O}_T) \longrightarrow Z_n(T)$$

où $Z_n(T)$ est le groupe des cycles de dimension n de T, définie par

$$Z_n(\mathcal{G}) = \sum_{\substack{t \in T \\ \dim t = n}} \mathrm{long}_{\mathcal{O}_{T,t}}(\mathcal{G}_t).\{\overline{t}\} .$$

Soit maintenant X projectif et lisse sur k et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module (cohérent) <u>holonome</u> (cf. [3] ou [10] 2, §10 ou [7] §2), alors $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \in \mathrm{Fil}_{d_X} K(\mathcal{O}_{T^*X})$ et <u>le cycle caractéristique de</u> $\mathcal{M}$ est par définition le cycle $Z(\mathrm{Car}\,\mathcal{M}) = Z_{d_X}(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})$ (où $d_X = d$ est la dimension de X/k).

LEMME 6.6.1. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-Module holonome, alors $\tau_{T^*X} \circ Car(\mathcal{M})$ est la classe du cycle caractéristique de $\mathcal{M}$ dans $A_d(T^*X) \otimes \mathbb{Q} \subset A(T^*X) \otimes \mathbb{Q}$.

Preuve. Tout d'abord, on a $A_n(T^*X) = 0$ pour $n < d$ car $\pi^* : A(X) \longrightarrow A(T^*$ est un isomorphisme gradué de degré d (cf. [13] IV, Cor. Thm. 1).

Si on note $(Fil_n)_{n \geqslant 0}$ la filtration topologique de $K(\mathcal{O}_{T^*X})$ par la dimension du support, on a

$$\tau_{T^*X}(Fil_n) \subset \bigoplus_{m<n} A_m(T^*X) \otimes \mathbb{Q}$$

pour tout $n \geqslant 0$ (cf. [1] III, §1), donc on a

$$\tau_{T^*X}(Fil_d) \subset A_d(T^*X) \otimes \mathbb{Q}$$

et

$$\tau_{T^*X}(Fil_n) = 0 \quad \text{pour tout } n < d .$$

D'autre part, si

$$Z(Car(\mathcal{M})) = \sum_T m_T . T$$

où T parcourt les fermés intègres de T^*X de dimension d , on a (cf. [16] X, 1.1.2)

$$Car(\mathcal{M}) \equiv \sum_T m_T . \mathcal{O}_{T^*X,T} \quad (\text{modulo } Fil_{d-1})$$

où $\mathcal{O}_{T^*X,T}$ est le prolongement par zéro de $\mathcal{O}_T$ à T^*X tout entier.

Enfin, pour tout fermé irréductible T de T^*X de dimension n , on a (cf. [1] III §1)

$$\tau_{T^*X}(\mathcal{O}_{T^*X,T}) \equiv [T] \quad (\text{modulo } \bigoplus_{m<n} A_m(T^*X) \otimes \mathbb{Q})$$

où $[T]$ est la classe de T dans $A_n(T^*X) \otimes \mathbb{Q}$.

Le lemme est conséquence immédiate de tous ces résultats.

Pour un $\mathcal{O}_X$-Module holome $\mathcal{M}$, on a donc

$$\sigma^*(\tau_{T^*X} \circ Car(\mathcal{M})) = \sigma^*([Z(Car(\mathcal{M}))]) \in A_o(X) \otimes \mathbb{Q} \tag{6.6.2}$$

car $\sigma^* : A(T^*X) \longrightarrow A(X)$ est l'isomorphisme gradué, de degré $-d$, inverse de π^* ; par suite, comme la composante de codimension 0 de $Todd(\mathcal{T}_X)^{-1}$ est 1 , on a encore

$$((\sigma^*(\tau_{T^*X} \circ Car(\mathcal{M})) . Todd(\mathcal{T}_X)^{-1})_o = \sigma^*([Z(Car(\mathcal{M}))])$$

et donc, comme le degré de $\sigma^*([Z(\mathrm{Car}(\mathcal{M}))])$ est par définition le nombre d'intersection de la section nulle $\sigma(X) = T^*_X X$ avec $Z(\mathrm{Car}(\mathcal{M}))$, nombre que l'on notera encore $(T^*_X X.Z(\mathrm{Car}(\mathcal{M})))$, on a

$$(6.6.3)\quad \deg[(\sigma^*(\tau_{T^*X}\circ \mathrm{Car}(\mathcal{M})).\mathrm{Todd}(\mathcal{O}_X)^{-1})_0] = (T^*_X X.Z(\mathrm{Car}(\mathcal{M}))) .$$

Par suite, pour $\mathcal{M}$ holonome, 6.4.2 dit que

$$(6.6.4)\qquad \chi(R\Gamma(X,DR_{X/k}(\mathcal{M}))) = (T^*_X X.Z(\mathrm{Car}(\mathcal{M}))) ;$$

pour $k=\mathbb{C}$, (6.6.4) est une formule due à Dubson (cf. [5]) et démontrée par voie analytique en utilisant le théorème de l'indice local de Kashiwara (cf. [9]).

Remarque 6.6.5. Pour $\mathcal{M}=\mathcal{O}_X$, on retrouve la formule bien connue

$$\sum_{i=0}^{d_X} (-1)^i \chi(X,\Omega^i_{X/k}) = (T^*_X X.T^*_X X) .$$

7. REMARQUES SUPPLÉMENTAIRES.

7.1. Reprenons les notations de 3.0, soit $\mathcal{B}.$ l'Anneau gradué

$$\mathcal{B}. = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{D}_i$$

dont la multiplication est induite par celle de $\mathcal{D}$, soit

$$\nu = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus \ldots .$$

la section unité de $\mathcal{D}$, vue comme section de $\mathcal{B}_1 = \mathcal{D}_1$ et soit $MG(\mathcal{B}.)$ la catégorie des $\mathcal{B}.$-Modules à gauche gradués $\mathcal{N}.$ avec $\mathcal{N}_i = 0$ pour $i \ll 0$; ν est un élément central de $\mathcal{B}.$ et donc, pour tout $\mathcal{N}. \in \text{ob } MG(\mathcal{B}.)$, la multiplication par ν sur $\mathcal{N}.$ définit un morphisme de $MG(\mathcal{B}.)$,

$$[\nu] : \mathcal{N}.(-1) \longrightarrow \mathcal{N}.$$

On dispose alors d'un foncteur

$$AF(\mathcal{D}) \longrightarrow MG(\mathcal{B}.) \tag{7.1.1}$$

qui à $[(\mathcal{M}^{-1}, \mathcal{M}_i^{-1}) \longrightarrow (\mathcal{M}^{0}, \mathcal{M}_i^{0})]$ associe

$$\mathcal{N}. = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_i^{0} / \mathcal{M}_i^{-1}$$

avec sa structure évidente de $\mathcal{B}.$-Module gradué.

En fait (7.1.1) est une équivalence de catégorie et, par cette équivalence, $MF(\mathcal{D})$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $MG(\mathcal{B}.)$ formée des $\mathcal{N}.$ pour lesquels $[\nu]$ est un monomorphisme.

De plus $\mathcal{B}./\nu\mathcal{B}.$ s'identifie à $gr.\mathcal{D}$ et via cette identification, on a

$$H^{-1}(gr.(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{M}_i^{\cdot})) = \text{Ker}([\nu])$$

$$H^{0}(gr.(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{M}_i^{\cdot})) = \text{Coker}([\nu])$$

pour tout $(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{M}_i^{\cdot}) \in \text{ob } AF(\mathcal{D})$ d'image $\mathcal{N}.$ par (7.1.1).

L'Anneau gradué $\mathcal{B}.$ a été introduit par O. Gabber dans sa preuve de l'involutivité des variétés caractéristiques.

7.2. Une autre catégorie exacte intervient naturellement dans l'étude des systèmes d'équations différentielles, à savoir la catégorie des espaces vectoriels topologiques, disons séparés, les morphismes étant les applications linéaires continues. La plupart des résultats de 1 et 2 s'appliquent à cette catégorie exacte.

7.3. Reprenons les notations de 4.0 et 5.0 ; on peut définir des analogues filtrés pour d'autres foncteurs que $\int_f \mathcal{M}^\cdot$: par exemple, pour $\mathcal{M}^\cdot \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N}^\cdot$, $\mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M}^\cdot$, $\mathcal{M}^\cdot \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^\cdot$; il devrait être possible aussi de définir un analogue filtré du foncteur $R\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{N}^\cdot)$ (cette question étant à rapprocher de celle de la construction de $R\ \underline{Hom}\ top(E^\cdot, F^\cdot)$ dans le cadre 7.2).

7.4. Reprenons les notations de 5.0 et 6.0 ; appelons provisoirement correspondance filtrée de $(X,(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^:))$ dans $(Y,(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{N}_i^:))$, où $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^:)$ $\in$ ob $D^bF_{parf}(\mathcal{D}_X)$ et $(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{N}_i^:) \in$ ob $D^bF_{parf}(\mathcal{D}_Y)$, la donnée d'un morphisme propre

$$f : X \longrightarrow Y$$

et d'un morphisme

$$u : (\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{N}_i^:) \longrightarrow \int_f (\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^:)$$

dans $D^bF_{parf}(\mathcal{D}_Y)$; soit alors X projectif et lisse sur k et (f,u) une correspondance filtré de $(X,(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^:))$ dans lui-même, $(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^:) \in$ ob $D^bF_{parf}(\mathcal{D}_X)$; alors, (f,u) agit sur $R\Gamma(X,DR_{X/k}(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^:))$ et sur $R\Gamma(X,R\sigma^!\ \widetilde{gr}\ \mathcal{M}^\cdot)$ où $\sigma : X \longrightarrow T^*X$ est la section nulle ; tout comme dans le cas particulier (f,u) = (id,id), on a

(7.4.1) $Tr((f,u),R\Gamma(X,DR_{X/k}(\mathcal{M}^\cdot,\mathcal{M}_i^:))) = Tr((f,u),R\Gamma(X,R\sigma^!\ \widetilde{gr}\ \mathcal{M}^\cdot))$;

sur $\mathbb{C}$, tout comme dans le cas (f,u) = (id,id), (7.4.1) établit un lien entre la formule de Lefschetz pour les faisceaux constructibles et celle pour les faisceaux cohérents (prendre $\mathcal{M}^\cdot$ à cohomologie holonome).

BIBLIOGRAPHY

[1] P. BAUM, W. FULTON, R. MACPHERSON.- Riemann-Roch for Singular Varieties. Publ. Math. I.H.E.S. n° 45 (1975), p. 101-146.

[2] A.A. BEILINSON, J.N. BERNSTEIN, P. DELIGNE, O. GABBER.- Faisceaux pervers, Conférence de Luminy, juillet 1981, "Analyse et Topologie sur les espaces singuliers", à paraître dans la collection Astérisque.

[3] J.E. BJÖRK.- Rings of Differential Operators. North-Holland (1979).

[4] J.L. BRYLINSKI.- Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge II, Conférence de Luminy, juillet 1981, à paraître dans Astérisque.

[5] J.L. BRYLINSKI, A.S. DUBSON et M. KASHIWARA.- Formule de l'indice pour les Modules holonomes et obstruction d'Euler locale. Notes aux C.R.A.S., 410, série I (1981).

[6] R. HARTSHORNE.- Residue and Duality. Lecture Notes in Mathematics n° 20, Springer-Verlag 1966.

[7] M. KASHIWARA.- B-Functions and Holonomic Systems. Inventiones Math. n° 38 (1976), p. 33-53.

[8] M. KASHIWARA.- On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations, II. Inventiones Math. n° 49 (1978), p. 121-135.

[9] M. KASHIWARA.- Systèmes d'équations micro-différentielles, cours rédigé par T.M. Fernandez, Université de Paris-Nord (1978).

[10] F. PHAM.- Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin. Progress in Mathematics n° 2, Birkhäuser 1979.

[11] D. QUILLEN.- Higher algebraic K-theory : I, Algebraic K-Theory 1. Lecture Notes in Mathematics n° 341 (1973), p. 77.

[12] J.L. VERDIER.- Le théorème de Riemann-Roch pour les variétés algébriques éventuellement singulières, d'après P. Baum, W. Fulton et R. Mac Pherson, Exposé 0, Astérisque n° 36-37 (1976), p. 5-20.

[13] R. ELKIK.- Equivalence rationnelle. Exposé II, Astérisque n° 36-37 (1976), p. 35-63.

[14] J.-L. VERDIER.- Catégories dérivées, SGA 4½. Lecture Notes in Mathematics n° 569, Springer Verlag (1977), p. 262-311.

[15] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER.- Théorie des Topos et Cohomologie Etale des schémas, SGA 4. Lecture Notes in Mathematics n° 269, 270 et 305, Springer Verlag 1972 et 1973.

[16] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE et al.- Théorie des Intersections et théorèmes de Riemann-Roch, SGA 6. Lecture Notes in Mathematics, n° 225, Springer Verlag 1971.

[17] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK.- Eléments de Géométrie Algébrique I. Springer Verlag 1971.

[18] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK.- Eléments de Géométrie Algébrique IV. Publ. I.H.E.S. n° 32 (1967).

G. LAUMON
Université de Paris-Sud
Mathématique
91405 ORSAY (France)

TRANSFORMATION DE FOURIER

ET MAJORATION DE SOMMES EXPONENTIELLES

(en collaboration avec N.M. Katz)

Sommaire

0. Introduction.

1. Dualité, perversité et pureté relatives.

2. La transformation de Fourier pour les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux.

3. Stratifications et théorème d'uniformité pour les foncteurs $Rf_!$, $D_{X/S}$ et Rf_* .

4. Un théorème d'uniformité pour la transformation de Fourier.

5. Une première application du théorème d'uniformité de la transformation de Fourier aux sommes trigonométriques.

6. Sommes trigonométriques que l'on peut rendre pures par adjonction d'un caractère multiplicatif auxiliaire d'ordre assez grand.

7. Lien avec la transformation de Fourier pour les $\mathcal{D}$-Modules et application (conjecturale) à la détermination d'un "gros" ouvert de pureté géométrique des sommes trigonométriques.

0. Introduction.

Soit X un schéma affine, de type fini sur $\mathbb{Z}$, qui est lisse, purement de dimension relative $m \geqslant 0$ sur $\mathbb{Z}[1/N]$, pour un certain entier $N \geqslant 1$, et soient $f_1,\ldots,f_r$ $(r \geqslant 1)$ des fonctions sur X qui définissent un morphisme fini vers l'espace affine $\mathbb{A}^r_{\mathbb{Z}[1/N]}$,

$$f = (f_1,\ldots,f_r) : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_{\mathbb{Z}[1/N]}$$

(par exemple, si $h \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_r]$ est tel que l'idéal jacobien

$$(h, \frac{\partial h}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial h}{\partial x_r})$$

dans $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_r]$ soit principal, engendré par un entier $N \geqslant 1$, et si $k_1 \geqslant 1,\ldots,k_r \geqslant 1$ sont des entiers, on peut prendre pour X l'hypersurface de $\mathbb{A}^r_{\mathbb{Z}[1/N]}$ d'équation $h = 0$ et prendre $f_1 = x_1^{k_1},\ldots,f_r = x_r^{k_r}$).

Etant donnés X et $f_1,\ldots,f_r$ comme ci-dessus, pour chaque r-uple $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{Z}^r$ et pour chaque nombre premier p, ne divisant pas N, on peut former la somme trigonométrique

$$S(p;a_1,\ldots,a_r) \overset{\text{dfn}}{=\!=} \sum_{x \in X(\mathbb{F}_p)} \exp(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{r} a_j f_j(x)) .$$

Plus généralement, pour chaque fonction g sur X qui est inversible sur X et pour tout caractère multiplicatif du corps $\mathbb{F}_p$

$$\chi_p : \mathbb{F}_p^{\times} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$$

on peut former la somme trigonométrique

$$S(p;a_1,\ldots,a_r;g,\chi_p) \overset{\text{dfn}}{=\!=} \sum_{x \in X(\mathbb{F}_p)} \exp(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{r} a_j f_j(x))\chi_p(g(x)) .$$

Alors, nous prouvons (cf. 5.2, 5.2.1) l'existence d'un polynôme non nul

$$F(y_1,\ldots,y_r) \in \mathbb{Z}[y_1,\ldots,y_r]$$

et l'existence d'une constante d (qui ne dépend que de la topologie algébrique de la variété complexe $X_{\mathbb{C}}$ munie de l'application $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^r_{\mathbb{C}}$ et qui est facilement calculable) ayant la propriété

suivante : si

$$F(a_1,\ldots,a_r) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

alors, pour toute fonction inversible g sur X et pour tout caractère χ_p de $\mathbf{F}_p^\times$, on a l'estimation

$$|S(p;a_1,\ldots,a_r;g,\chi_p)| \leqslant d.(\sqrt{p})^m$$

(nous énonçons et prouvons en fait (cf. 5.2, 5.2.1) un résultat légèrement plus fort, où $\mathbb{Z}[1/N]$ est remplacé par n'importe quel sous-anneau $R \subset \mathbb{C}$ qui est de type fini sur $\mathbb{Z}$).

Comme on peut s'y attendre, de telles estimations sont obtenues comme conséquence d'une analyse précise de la cohomologie ℓ-adique qui donne lieu à de telles sommes et des résultats fondamentaux de Deligne sur les "conjectures de Weil". La possibilité de faire cette analyse cohomologique repose sur deux idées.

La première est celle de la transformation de Fourier en cohomologie ℓ-adique (cf. numéro 2), une opération qui existe "indépendamment" en chaque caractéristique $p > 0$. Grâce à l'interprétation cohomologique des sommes exponentielles et au théorème de changement de base pour la cohomologie à support propre, cette opération est directement reliée aux sommes trigonométriques. Une découverte récente, due à Brylinski, Deligne, Verdier et au second auteur de cet article, est que, bien que cela apparaisse assez étrange à priori, la transformation de Fourier commute à la dualité (cf. 2.1.3 et 2.1.5). Une fois armé de ce résultat inattendu, il suffit de le combiner avec les résultats fondamentaux de Deligne (cf. [8]), à travers le formalisme de la perversité (cf. [1], [6] et numéro 1) pour contrôler assez bien la situation en chaque caractéristique $p > 0$ (cf. 5.5).

La deuxième idée est la suivante : bien que l'on ne puisse pas espérer regrouper les transformations de Fourier pour les caractéristiques $p > 0$ en une seule transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}$ (sur $\mathbf{F}_p$, il y a $p-1$ transformation de Fourier, une pour chaque caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_p \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et il n'y a pas de façon raisonnable de choisir de manière compatible un tel ψ pour chaque $p > 0$), tout se passe du point de vue topologique comme si une telle transformation sur $\mathbb{Z}$ existait (tous les ψ pour tous les $p > 0$ ont un comportement topologique identique, ce qui les distingue est

de nature purement arithmétique). Plus précisément, nous démontrons (cf. 4.1) un énoncé du type Riemann-Roch pour "la" transformation de Fourier en se servant d'un argument délicat de balance entre la ramification sauvage et la ramification modérée (cet argument est d'ailleurs déjà à la base des résultats du cours à Orsay du premier auteur, cf. [11]). Comme intermédiaire à la preuve de 4.1, nous obtenons aussi un théorème du type Riemann-Roch pour $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini entre schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$ et pour les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux (cf. 3.1.2).

Une autre transformation, celle-là en caractéristique 0, mérite aussi le nom de transformation de Fourier (cf. [5] et 7.1) : il s'agit d'une transformation pour les $\mathcal{D}$-Modules. Cette transformation est tout à fait similaire aux transformations de Fourier ℓ-adiques considérées ci-dessus (tout comme $\psi : \mathbf{F}_p \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est similaire au caractère $t \longmapsto e^{2\pi i t}$ de $\mathbb{R}$, tout comme les sommes de Gauss sont similaires aux valeurs de la fonction $\Gamma(s)$ aux $s \in \mathbb{Q}$, ...). Cette similitude et le dictionnaire "Riemann-Hilbert" entre $\mathcal{D}$-Modules holonomes réguliers singuliers et faisceaux constructibles (en géométrie analytique) nous amène tout naturellement à conjecturer un énoncé du type Riemann-Roch commun aux transformations de Fourier en caractéristique $p > 0$ et en caractéristique 0. Malheureusement, pour formuler correctement un tel énoncé, il nous manque à l'heure actuelle un outil fondamental, à savoir la notion de cycle caractéristique pour un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau, analogue au cycle caractéristique d'un $\mathcal{D}$-Module ; aussi plutôt que d'énoncer une conjecture générale sous une forme plus ou moins étriquée, nous nous limitons à en formuler les conséquences "pratiques" dans la détermination de la constante d et d'un polynôme $F(y_1,\ldots,y_r)$ "optimal" faisant marcher les estimations ci-dessus des sommes trigonométriques (cf. Conjecture 7.2.2).

Nous traitons aussi une deuxième sorte de sommes exponentielles au numéro 6. On considère encore un schéma affine, de type fini sur $\mathbb{Z}$, X, qui est lisse, purement de dimension relative m sur $\mathbb{Z}[1/N]$, pour un certain entier $N \geqslant 1$, et on considère des fonctions $f_1,\ldots,f_r$ $(r \geqslant 1)$ sur X et une fonction inversible g sur X telles que le morphisme

$$(f;g) = (f_1,\ldots,f_r;g) : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_{\mathbb{Z}[1/N]} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}[1/N]}$$

soit fini (par exemple, si on part d'une situation $(X_o, f_1, \ldots, f_{r+1})$ comme au début de l'introduction, i.e. avec X_o affine, lisse et purement de dimension relative m sur $\mathbb{Z}[1/N]$ et avec $(f_1, \ldots, f_{r+1}) : X_o \longrightarrow \mathbb{A}^{r+1}_{\mathbb{Z}[1/N]}$ fini, alors on peut prendre

$$X = X_o[1/f_{r+1}] ,$$

i.e. l'ouvert d'inversibilité de f_{r+1} et

$$(f_1, \ldots, f_r; g) := (f_1, \ldots, f_r; f_{r+1})) .$$

Etant donnés X et $f_1, \ldots, f_r, g$ comme ci-dessus, pour chaque r-uple $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, pour chaque nombre premier p ne divisant pas N et pour chaque caractère $\chi_p : \mathbb{F}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, on peut former la somme trigonométrique

$$S(p; a_1, \ldots, a_r; \chi_p) = \sum_{x \in X(\mathbb{F}_p)} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{r} a_j f_j(x)\right) \chi_p(g(x)) .$$

Alors, nous prouvons (cf. 6.2, 6.3) l'existence d'un polynôme non nul

$$F(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_r] ,$$

l'existence d'une constante d (qui ne dépend que de la topologie algébrique de la variété complexe $X_{\mathbb{C}}$ munie de l'application $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^r_{\mathbb{C}}$ et qui est facilement calculable) et l'existence d'un ensemble fini $\mathcal{S}$ d'entiers $\geqslant 1$ (lui aussi de nature topologique) ayant la propriété suivante : si

$$F(a_1, \ldots, a_r) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

et si

$$\mathrm{ord}(\chi_p) \notin \mathcal{S} ,$$

où $\mathrm{ord}(\chi_p)$ est l'ordre exact du caractère χ, alors, on a l'estimation

$$|S(p; a_1, \ldots, a_r; \chi_p)| \leqslant d(\sqrt{p})^m .$$

Comme auparavant, ces estimations sont conséquence d'une analyse cohomologique. On se sert d'une expression cohomologique de telles sommes comme étant la fibre en $(a_1, \ldots, a_r)$ du transformé de Fourier d'un objet qui vit en caractéristique 0 et qui "contient" le caractère χ_p. C'est alors pour garantir la perversité de cet objet qu'il

faut exclure les χ_p de certains ordres. Plus précisément, l'ensemble $\mathcal{S}$ est déterminé par le polynôme caractéristique de la monodromie agissant sur certains faisceaux de cycles évanescents ou encore par le polynôme de Bernstein-Sato correspondant. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que la détermination de F, d et $\mathcal{S}$ peut se faire aussi bien via les $\mathcal{D}$-Modules que via la cohomologie ℓ-adique, i.e. d'énoncer pour ces dernières sommes une conjecture analogue à 7.2.2.

Nous remercions chaleureusement Brylinski, Deligne, Malgrange et Verdier pour de fructueuses discussions sur "la" transformation de Fourier sous toutes ses formes. Nous remercions aussi Madame Bonnardel qui a réalisé avec grand soin la frappe du manuscrit.

1. Dualité, perversité et pureté relatives.

1.0. Dans tout cet article, par "schéma", on entendra toujours un schéma séparé et noethérien ; de plus, on dira qu'un schéma est bon s'il existe un morphisme de type fini, $X \longrightarrow S$, avec S un schéma régulier de dimension $\leqslant 1$ (pour tout entier $N \geqslant 1$, un bon $\mathbb{Z}[1/N]$-schéma est donc un bon schéma sur lequel N est inversible, ce qui ne signifie pas que ce schéma est de type fini sur $\mathbb{Z}[1/N]$; même remarque pour un bon $\mathbb{F}_q$-schéma).

Fixons un nombre premier ℓ et une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$. Pour tout bon $\mathbb{Z}[1/\ell]$-schéma, on dispose (cf. [8], 1.1.3) de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, muni des opérations internes $R\underline{Hom}$ et $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$. Pour tout morphisme de type fini

$$f : X \longrightarrow Y$$

entre bons $\mathbb{Z}[1/\ell]$-schémas, on dispose (cf. [8] 1.1.2) des foncteurs

$$Rf_!, Rf_* : D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

$$f^!, f^* : D_c^b(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui satisfont au formalisme habituel de la dualité (cf. [SGA 4], XVIII, §3).

1.1. Soit S un bon $\mathbb{Z}[1/\ell]$-schéma, pour tout S-schéma de type fini

$$\pi : X \longrightarrow S$$

on définit le complexe dualisant relatif $K_{X/S}$ comme étant l'objet

$$K_{X/S} = \pi^! \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$; le foncteur

$$D_{X/S}(-) = R\underline{Hom}(-,K_{X/S}) : D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)^\circ \longrightarrow D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est, par définition, le foncteur dualisant relatif.

On vérifie facilement les propriétés suivantes de $K_{X/S}$ et $D_{X/S}$:

(1.1.1) $$D_{X/S}(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M) = R\underline{Hom}(K, D_{X/S}(M))$$

et, si $f : X \longrightarrow Y$ est un S-morphisme entre S-schémas de type fini,

(1.1.2) $$K_{X/S} = f^! K_{Y/S}$$

(1.1.3) $$Rf_* D_{X/S}(K) = D_{Y/S}(Rf_! K)$$

(1.1.4) $$f^! D_{Y/S}(N) = D_{X/S}(f^* N)$$

($K, M \in$ ob $D_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ et $N \in$ ob $D_c^b(Y, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$; (1.1.3) n'est autre que la dualité de Verdier).

Par contre, pour $\pi : X \longrightarrow S$ et K donnés, il n'est pas vrai en général que la flèche canonique

(1.1.5) $$K \longrightarrow D_{X/S} \circ D_{X/S}(K)$$

soit un isomorphisme. On a cependant les résultats suivants :

PROPOSITION 1.1.6. *Soit $\pi : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini, soient $K \in$ ob $D_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ et $K' = D_{X/S}(K)$. Si la formation de $D_{X/S}(K)$ et $D_{X/S}(K')$ commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' bon, la flèche canonique* (1.1.5) *est un isomorphisme.*

En effet, pour S le spectre d'un corps, $D_{X/S}$ n'est autre que le foncteur dualisant absolu et dans ce cas (1.1.5) est un isomorphisme (cf. [SGA 4½], [Th. Finitude], 4.3).

PROPOSITION 1.1.7. *Soit $\pi : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini et soit $K \in$ ob $D_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Il existe un ouvert dense $U \subset S$ tel que la formation de $D_{X/S}(K)$ commute à tout changement de base $S' \longrightarrow U \subset S$, avec S' bon (U dépend de π et de K).*

En effet, cela résulte de [SGA 4½], [Th. Finitude], 2.9 et 2.10.

DÉFINITION 1.1.8. *Soit $\pi : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini. Nous dirons qu'un objet K de $D_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est réflexif relativement à S s'il vérifie les hypothèses et donc la conclusion de* 1.1.6.

1.1.9. *Remarques* (i) Par définition, la propriété de réflexivité relativement à S est stable par dualité relativement à S et par tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' bon.

(ii) D'après 1.1.7, pour tout objet K de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, il existe un ouvert dense $U \subset S$ tel que $K|\pi^{-1}(U)$ soit réflexif relativement à U ; en particulier, si S est le spectre d'un corps, tout objet de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est réflexif relativement à S .

(iii) Si $\pi : X \longrightarrow S$ est lisse et si les faisceaux de cohomologie de K sont lisses sur X , K est réflexif relativement à S (pour $\mathcal{F}$ un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X , la formation de $R\underline{Hom}(\mathcal{F},\bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \underline{Hom}(\mathcal{F},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)[0]$ commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' bon).

(iv) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un S-morphisme lisse, purement de dimension relative d , entre S-schémas de type fini, il résulte de (1.1.4) que $f^*(-)[d] = f^!(-)[-d](-d)$ préserve la réflexivité relativement à S .

(v) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme entre S-schémas de type fini et soit K un objet de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est réflexif relativement à S . Supposons que, pour tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' bon, transformant $(f : X \longrightarrow Y, K)$ en $(f' : X' \longrightarrow Y', K')$, les flèches d'oubli des supports

$$Rf_!K' \longrightarrow Rf_*K'$$

$$Rf_!D_{X'/S'}(K') \longrightarrow Rf_*D_{X'/S'}(K')$$

soient des isomorphismes. Alors, il résulte de (1.1.3) et du théorème de changement de base pour un morphisme propre (cf. [SGA 4] XII, 5.1) que $Rf_!K \xrightarrow{\sim} Rf_*K$ est un objet de $D_c^b(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ réflexif relativement à S .

En particulier, si f est un morphisme propre, Rf_* préserve la réflexivité relativement à S .

(vi) Tout facteur direct d'un objet réflexif relativement à S de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est aussi réflexif relativement à S .

1.2. Soit S un bon $\mathbb{Z}[1/\ell]$-schéma et soit $\pi : X \longrightarrow S$ un S-schéma de type fini. Pour tout fermé Z de X , on appelle <u>dimension de</u> Z <u>relativement à</u> S et on note $\dim_S(Z)$ le maximum des dimensions des fibres géométriques de $\pi|Z : Z \longrightarrow S$.

DÉFINITION 1.2.1. <u>Nous dirons qu'un objet</u> K <u>de</u> $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ <u>est pervers relativement à</u> S <u>s'il vérifie les conditions suivantes</u> :

(i) K est réflexif relativement à S ,

(ii) pour tout entier i , on a

(A) $\dim_S(\mathrm{Supp}\ \mathcal{H}^i(K)) \leqslant -i$

(B) $\dim_S(\mathrm{Supp}\ \mathcal{H}^i(D_{X/S}(K))) \leqslant -i$

où, pour tout $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X , $\mathrm{Supp}\ \mathcal{F}$ désigne son support.

1.2.2. Remarques (i) Par définition, la propriété de perversité relativement à S est stable par dualité relativement à S et par tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' bon.

(ii) Si S est le spectre d'un corps, un objet K de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est pervers relativement à S si, et seulement si, c'est un faisceau pervers pour la perversité intermédiaire au sens de [6] 2.3 ou [1] §4. Par suite, pour S de nouveau un bon $\mathbb{Z}[1/\ell]$-schéma, un objet K de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, qui est réflexif relativement à S , est pervers relativement à S si, et seulement si, sa restriction à chaque fibre géométrique de $\pi : X \longrightarrow S$ est un faisceau pervers pour la perversité intermédiaire.

(iii) Si $\pi : X \longrightarrow S$ est lisse, purement de dimension relative d , et si K est un objet de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ de la forme $\mathcal{F}[d]$, où $\mathcal{F}$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X , K est pervers relativement à S (cf. 1.1.9 (iii)).

(iv) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un S-morphisme lisse, purement de dimension relative d , entre S-schémas de type fini, le foncteur $f^*(-)[d] = f^!(-)[-d](-d)$ préserve la perversité relativement à S (cf. 1.1.9 (iv)).

(v) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme affine entre S-schémas de type fini et soit K un objet de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pervers relativement à S . Supposons que, pour tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' bon, transformant $(f : X \longrightarrow Y, K)$ en $(f' : X' \longrightarrow Y', K')$, les flèches d'oubli des supports

$$Rf'_!K' \longrightarrow Rf'_*K'$$

$$Rf'_!D_{X'/S'}(K') \longrightarrow Rf'_*D_{X'/S'}(K')$$

sont des isomorphismes. Alors $Rf_!K \xrightarrow{\sim} Rf_*K$ est un objet de $D^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pervers relativement à S (en effet, d'après 1.1.9 (v),

$Rf_! K \xrightarrow{\sim} Rf_* K$ est réflexif relativement à S et d'après 1.2.2 (ii), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas la conclusion résulte de [1] 4.1.1 et 4.1.2).

En particulier, si f est fini (affine et propre), le foncteur $Rf_* = f_*$ préserve la perversité relativement à S.

(vi) Tout facteur direct d'un objet pervers relativement à S de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est aussi pervers relativement à S.

1.3. Supposons maintenant que S est un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$ et soit $\pi : X \longrightarrow S$ un S-schéma de type fini.

DÉFINITION 1.3.1. Soit m un entier. Un objet K de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ sera dit pur, de poids m, relativement à S s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) K est réflexif relativement à S,

(ii) pour tout entier i, le faisceau de cohomologie

(A) $\mathcal{H}^i(K)$ est mixte de poids ponctuels $\leqslant i+m$

(B) $\mathcal{H}^i(D_{X/S}(K))$ est mixte de poids ponctuels $\leqslant i-m$.

1.3.2. Remarques (i) Par définition, la notion de pureté, de poids m, relativement à S est stable par dualité relativement à S et par tout changement de base $S' \longrightarrow S$ avec S' de type fini sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$.

(ii) Si S est le spectre d'un corps fini, un objet K de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est pur, de poids m, relativement à S si, et seulement si, il est pur, de poids m, au sens de [8] 6.2.4. Par suite, pour S de nouveau un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$ arbitraire, si K est un objet de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est réflexif relativement à S et qui est mixte ainsi que $D_{X/S}(K)$, alors K est pur, de poids m, relativement à S si, et seulement si, sa restriction à la fibre de $\pi : X \longrightarrow S$, en chaque point fermé de S, est pure, de poids m (on fera attention au fait que "mixte" (cf. [8] 1.2.2 et 6.2.2) ne se teste pas fibre à fibre mais est une propriété absolue de K sur X).

(iii) Si $\pi : X \longrightarrow S$ est lisse, purement de dimension relative d, et si K est un objet de $D^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ de la forme $\mathcal{F}[d]$, où $\mathcal{F}$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X, ponctuellement pur de poids m,

K est pur, de poids $m+d$, relativement à S (cf. 1.1.9 (iii)).

(iv) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un S-morphisme lisse, purement de dimension relative d, entre S-schémas de type fini, alors le foncteur $f^*(-)[d] = f^!(-)[-d](-d)$ transforme objets purs, de poids m, relativement à S en objets purs, de poids $m+d$, relativement à S (cf. 1.1.9 (iv)).

(v) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme entre S-schémas de type fini et soit K un objet de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pur, de poids m, relativement à S. Supposons que, pour tout changement de base $S' \longrightarrow S$ avec S' de type fini sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$, transformant $(f : X \longrightarrow Y, K)$ en $(f' : X' \longrightarrow Y', K')$, les flèches d'oubli des supports

$$Rf_!'K' \longrightarrow Rf_*'K'$$

$$Rf_!'D_{X'/S'}(K') \longrightarrow Rf_*'D_{X'/S'}(K')$$

soient des isomorphismes. Alors $Rf_!K \xrightarrow{\sim} Rf_*K$ est un objet de $D_c^b(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pur, de poids m, relativement à S (en effet, d'après 1.1.9 (v), $Rf_!K \xrightarrow{\sim} Rf_*K$ est réflexif relativement à S et, d'après [8] 3.3.1 et 6.2.3, $Rf_!K$ et $D_{Y/S}(Rf_*K) = Rf_!D_{X/S}(K)$ sont mixtes, donc, d'après 1.3.2 (ii), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps fini ; dans ce cas la conclusion résulte de [8] 6.2.3).

En particulier, si f est propre, le foncteur Rf_* préserve la pureté, de poids m, relativement à S.

(vi) Tout facteur direct d'un objet pur, de poids m, relativement à S de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est aussi pur, de poids m, relativement à S.

1.4. Soit S un bon $\mathbb{Z}[1/\ell]$-schéma.

PROPOSITION 1.4.1. *Soit $\pi : X \longrightarrow S$ un morphisme lisse, de type fini, purement de dimension relative d, et soit K un objet de $D_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ dont les faisceaux de cohomologie sont lisses sur X et que l'on suppose pervers relativement à S. Alors K est de la forme $\mathcal{F}[d]$, où $\mathcal{F}$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X ; de plus $D_{X/S}(K) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)[d](d)$. Si l'on suppose en outre que S est de type fini sur $\mathbb{Z}$ et que K est pur, de poids m, relativement à S, alors $\mathcal{F}$ est ponctuellement pur de poids $m-d$ sur X.*

En effet, les hypothèses de perversité relativement à S de K et de lissité des $\mathcal{H}^i(K)$ sur X assurent que $\mathcal{H}^i(K) = 0$ si $i > -d$. D'autre part, comme π est lisse, purement de dimension relative d, $K_{X/S} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[2d](d)$ et donc

$$\mathcal{H}^i(D_{X/S}(K)) = \mathcal{H}^i(\underline{R\mathrm{Hom}}(K, K_{X/S})) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{H}^{-i-2d}(K), \bar{\mathbb{Q}}_\ell)(d) .$$

On déduit de ce qui précède que les $\mathcal{H}^i(D_{X/S}(K))$ sont lisses et l'hypothèse de perversité relativement à S de K assure alors que $\mathcal{H}^i(D_{X/S}(K)) = 0$ si $i > -d$. Par suite, $\mathcal{H}^i(K) = 0$ si $-i-2d > -d$, i.e. si $i < -d$ et la cohomologie de K est concentrée en degré $-d$, donc $K = \mathcal{H}^{-d}(K)[d]$. Les autres assertions sont maintenant faciles.

2. La transformation de Fourier pour les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux.

2.0. Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p et soit ℓ un nombre premier $\ell \neq p$. Pour tout caractère additif non trivial

$$\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

on note $\mathcal{L}_\psi$ le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ associé à ψ (cf. [SGA 4½], [Sommes trig.], 1.7) ; si x est la coordonnée de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$, c'est le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ déduit du $\mathbb{F}_q$-torseur sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ d'équation

$$t^q - t = x$$

par extension du groupe structural via ψ^{-1}.

Pour tout bon $\mathbb{F}_q$-schéma $S \xrightarrow{a} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, on note encore $\mathcal{L}_\psi$ le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_S$ déduit de $\mathcal{L}_\psi$ par image réciproque via $(\mathrm{id},a) : \mathbb{A}^1_S \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$.

Soient $\pi : E \longrightarrow S$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$ sur un bon $\mathbb{F}_q$-schéma S ; on note $\pi^\vee : E^\vee \longrightarrow S$ son fibré vectoriel dual,

$$E \xleftarrow{pr} E \times_S E^\vee \xrightarrow{pr^\vee} E^\vee$$

les deux projections et

$$\mu : E \times_S E^\vee \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$$

la flèche d'évaluation (pour $E = \mathbb{A}^r_S$ de coordonnées $x_1,\dots,x_r$ et $E^\vee = \mathbb{A}^r_S$ de coordonnées $x_1^\vee,\dots,x_r^\vee, \mu(\underline{x},\underline{x}^\vee) = \sum_{i=1}^{r} x_i\, x_i^\vee$).

2.1. Deligne a associé à $\pi : E \longrightarrow S$ et à ψ comme ci-dessus, deux foncteurs "méritant" le nom de transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}_{!,\psi} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{*,\psi} : D^b_c(E,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D^b_c(E^\vee,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)\ ,$$

définis par

(2.1.1) $$\mathcal{F}_{!,\psi}(-) = R\,pr_!^{\vee}(pr^*(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_\psi)[r]$$

(2.1.2) $$\mathcal{F}_{*,\psi}(-) = R\,pr_*^{\vee}(pr^*(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_\psi)[r] \ .$$

En fait un résultat fondamental pour notre propos est qu'il n'y a qu'une seule transformation de Fourier ; plus précisément, on a (cf. l'Appendice à ce numéro pour une démonstration) :

THÉORÈME 2.1.3. La flèche naturelle d'oubli des supports

$$\mathcal{F}_{!,\psi}(-) \longrightarrow \mathcal{F}_{*,\psi}(-)$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Nous noterons donc simplement

(2.1.4) $$\mathcal{F}_\psi(-) = \mathcal{F}_{!,\psi}(-) = \mathcal{F}_{*,\psi}(-)$$

le foncteur transformation de Fourier associé à $\pi : E \longrightarrow S$ et au caractère additif non trivial ψ .

COROLLAIRE 2.1.5 (i) La formation de $\mathcal{F}_\psi(-)$ commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' bon.

(ii) Soit $\overline{\psi} = \psi^{-1}$ le caractère inverse de ψ , on a

$$D_{E^\vee/S} \circ \mathcal{F}_\psi(-) = \mathcal{F}_{\overline{\psi}} \circ D_{E/S}(-)(r) \ .$$

(iii) Si K est un objet de $D_c^b(E,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ réflexif relativement à S (resp. pervers relativement à S), $\mathcal{F}_\psi(K)$ est un objet de $D_c^b(E^\vee,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui a la même propriété.

En effet, la propriété (i) se vérifie grâce au théorème de changement de base pour un morphisme propre (cf. [SGA 4] XII 5.1) sur l'expression $\mathcal{F}_{!,\psi}$ de Fourier.

Pour la partie (ii), il résulte facilement de (1.1.1), (1.1.3) et (1.1.4) que

$$D_{E^\vee/S} \circ \mathcal{F}_{!,\psi}(-) = R\,pr_*^{\vee}\ R\underline{Hom}(\mu^*\mathcal{L}_\psi, pr^! D_{E/S}(-))[-r]$$

or $\mu^*\mathcal{L}_\psi$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $E \times_S E^\vee$, de dual $\underline{Hom}(\mu^*\mathcal{L}_\psi, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \mu^*\mathcal{L}_{\overline{\psi}}$ et pr est lisse, purement de dimension relative r , de sorte que

$$\underline{\mathrm{RHom}}(\mu^*\mathcal{L}_\psi, \mathrm{pr}^!(-)) = \mathrm{pr}^*(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_{\bar{\psi}}[2r](r)$$

d'où la conclusion, compte-tenu de 2.1.3.

Pour la partie (iii), on remarque que le foncteur $\mathrm{pr}^*(-)[r]$ respecte la réflexivité et la perversité relativement à S (cf. 1.1.9 (iv) et 1.2.2 (iv)) et qu'il en est de même du foncteur $(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_\psi$. Maintenant, la conclusion résulte de 1.1.9 (v) et 1.2.2 (v) : en effet, $\mathrm{pr}^\vee$ est affine et, grâce à 2.1.3 et à l'égalité

$$D_{E \times_S E^\vee / S}(\mathrm{pr}^*(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_\psi[r]) = \mathrm{pr}^*(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_{\bar{\psi}}[r](r)$$

prouvée ci-dessus, on voit que les hypothèses de 1.1.9 (v) et 1.2.2 (v) sont satisfaites.

2.2. Supposons maintenant que S est de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Si l'on conjugue le résultat fondamental de Deligne [8] 6.2.3 et le théorème 2.1.3 on obtient :

THÉORÈME 2.2.1. *Si* K *est un objet de* $D_c^b(E, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *pur, de poids* m, *relativement à* S, *alors* $\mathcal{F}_\psi(K)$ *est un objet de* $D_c^b(E^\vee, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *pur, de poids* $m+r$, *relativement à* S.

En effet, le foncteur $\mathrm{pr}^*(-)[r]$ transforme objets purs, de poids m, relativement à S en objets purs, de poids $m+r$, relativement à S (cf. 1.3.2 (iv)) et le foncteur $(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_\psi$ préserve la pureté, de poids $m+r$, relativement à S.

Maintenant, la conclusion résulte de 1.3.2 (v) : en effet, grâce à 2.1.3 et à l'égalité

$$D_{E \times_S E^\vee}(\mathrm{pr}^*(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_\psi[r]) = \mathrm{pr}^*(-) \overset{!!}{\otimes} \mu^*\mathcal{L}_\psi[r](r) ,$$

déjà utilisée dans la preuve de 2.1.5, les hypothèses de 1.3.2 (v) sont satisfaites.

2.3. Soit S un bon $\mathbb{F}_q$-schéma. Pour tout objet K de $D_c^b(E, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, il existe un ouvert dense $U^\vee \subset E^\vee$ au-dessus duquel les faisceaux de cohomologie de $\mathcal{F}_\psi(K)$ sont lisses (tout simplement parce que $\mathcal{F}_\psi(K) \in \mathrm{ob}\, D_c^b(E^\vee, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$). On reteindra surtout, des résultats ci-dessus relatifs à Fourier, le scholie suivant :

SCHOLIE 2.3.1. Soit K un objet de $D^b_c(E,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pervers relativement à S et soit $U^\vee \subset E^\vee$ un ouvert au-dessus duquel les faisceaux de cohomologie de $\mathcal{F}_\psi(K)$ sont lisses. Alors :

(i) la cohomologie de $\mathcal{F}_\psi(K)|U^\vee$ et de $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(D_{E/S}(K))|U^\vee$ est concentrée en degré $-r$,

(ii) $\mathcal{H}^{-r}(\mathcal{F}_\psi(K)|U^\vee)$ et $\mathcal{H}^{-r}(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(D_{E/S}(K))|U^\vee)$ sont des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de même rang ; de plus, si S est de type fini sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ et si K est pur, de poids m , relativement à S , ces $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux sont ponctuellement purs de poids m et $-m$ respectivement,

(iii) ces deux $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur $U^\vee$ sont en dualité : on a un accouplement parfait

$$\mathcal{H}^{-r}(\mathcal{F}_\psi(K)|U^\vee) \times \mathcal{H}^{-r}(\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(D_{E/S}(K))|U^\vee) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur $U^\vee$.

Cela résulte aussitôt de 1.4.1, 2.1.5 et 2.2.1.

Appendice 2.4 : démonstration de l'égalité $\mathcal{F}_{!,\psi} = \mathcal{F}_{*,\psi}$.

Dans cet appendice, nous travaillerons avec des faisceaux de torsion plutôt qu'avec des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux. L'énoncé 2.1.3 que nous voulons démontrer résulte, par les arguments standard de passage à la limite du théorème 2.4.1 ci-dessous.

Soient S un $\mathbb{F}_q$-schéma, $E \xrightarrow{\pi} S$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$, A un anneau local commutatif fini de caractéristique résiduelle ℓ , $\ell \neq p$, et $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow A^\times$ un caractère additif non trivial. On définit $\mathcal{L}_\psi$, $\mathcal{F}_{!,\psi}$ et $\mathcal{F}_{*,\psi}$ comme en 2.0 ; maintenant $\mathcal{L}_\psi$ est un faisceau localement constant constructible de A-modules libres de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_S$ et $\mathcal{F}_{!,\psi}$, $\mathcal{F}_{*,\psi}$ sont des foncteurs de $D^b_c(E,A)$ vers $D^b_c(E^\vee,A)$.

THÉORÈME 2.4.1. La flèche d'oubli des supports

$$\mathcal{F}_{!,\psi}(-) \longrightarrow \mathcal{F}_{*,\psi}(-)$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Prouvons 2.4.1. Remarquons tout d'abord que l'énoncé 2.4.1 est local pour la topologie de Zariski sur S , ce qui nous permet de supposer $E = \mathbb{A}^r_S$.

D'autre part, en "s'inspirant" de la relation

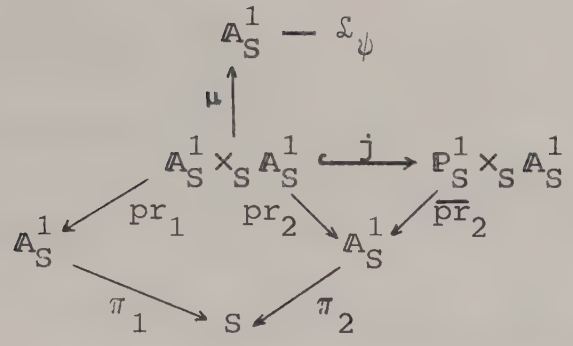
$$\sum_{x_1,\ldots,x_r \in \mathbb{F}_q} f(x_1,\ldots,x_r)\psi\Big(\sum_{i=1}^{r} x_i x_i^\vee\Big)$$

$$= \sum_{x_r \in \mathbb{F}_q} \psi(x_r x_r^\vee) \sum_{x_1,\ldots,x_{r-1} \in \mathbb{F}_q} f(x_1,\ldots,x_r)\psi\Big(\sum_{i=1}^{r-1} x_i x_i^\vee\Big)$$

on vérifie facilement que la flèche $\mathcal{F}_{!,\psi}(-) \longrightarrow \mathcal{F}_{*,\psi}(-)$ se calcule variable par variable, ce qui nous ramène par récurrence sur r , au cas où $r = 1$.

Nous prouverons donc 2.4.1 sous les hypothèses supplémentaires : $r = 1$ et $E = \mathbb{A}^1_S$.

Fixons les notations par le diagramme



et soient x (resp. y) la coordonnée de la première (resp. seconde) copie de $\mathbb{A}^1_S$ dans $\mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{A}^1_S$ (de sorte que $\mu(x,y) = xy$). Comme

$$R\,pr_{2!} = R\,\overline{pr}_{2*} \circ j!$$

$$R\,pr_{2*} = R\,\overline{pr}_{2*} \circ Rj_*$$

il suffit de montrer que la flèche canonique de foncteurs

$$\text{(a)} \qquad j_!(pr_1^*(-) \overset{!!}{\otimes}_A \mu^* \mathcal{L}_\psi) \longrightarrow Rj_*(pr_1^*(-) \overset{!!}{\otimes}_A \mu^* \mathcal{L}_\psi)$$

est un isomorphisme. Au-dessus de $\mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{A}^1_S$ c'est trivialement le cas, il n'y a de problème qu'au dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{A}^1_S$ où ∞_S est la section à l'infini de $\mathbb{A}^1_S$.

Nous allons voir maintenant qu'il suffit de montrer que (a) est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S} \hookrightarrow \infty_S \times_S \mathbb{A}^1_S$. Notons en effet, pour tout $a \in \mathbb{A}^1_S(S)$,

$$[a] : \mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{A}^1_S \longrightarrow \mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{A}^1_S$$

la translation par a sur le second facteur ($(x,y) \longmapsto (x,y+a)$) et

$$\langle a \rangle : \mathbb{A}^1_S \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$$

la multiplication par a , alors

$$[a]^* \mu^* \mathcal{L}_\psi = \mu^* \mathcal{L}_\psi \otimes_A pr_1^* \langle a \rangle^* \mathcal{L}_\psi$$

(en vertu du caractère additif de $\mathcal{L}_\psi$ et de l'égalité $x(y+a) = xy + xa$) ; donc, si (a) est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$, c'est aussi un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S 0_S$, où 0_S est la section nulle de $\mathbb{A}^1_S$ (prendre pour a la section constante de valeur 1 , 1_S , de $\mathbb{A}^1_S$ pour ramener ce qui se passe sur $\infty_S \times_S 0_S$ en ce qui se passe sur $\infty_S \times_S 1_S$).

Pour montrer que ⓐ est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$, considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S} \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{pr}_1} \\ \mathbb{A}^1_S & \xrightarrow{\quad i \quad} & \mathbb{P}^1_S \end{array}$$

on en déduit un carré commutatif de morphismes de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \tilde{pr}_1^*\, i_!(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A j_! \mu^* \mathcal{L}_\psi & \xrightarrow{\ⓒ} & \tilde{pr}_1^*\, Ri_*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A j_! \mu^* \mathcal{L}_\psi \\ \ⓑ \downarrow & & \downarrow \ⓓ \\ j_!(pr_1^*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mu^* \mathcal{L}_\psi) & \xrightarrow{\ⓐ} & Rj_*(pr_1^*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mu^* \mathcal{L}_\psi) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les flèches d'oubli des supports et où les flèches verticales sont des flèches de changement de base relative au carré cartésien ci-dessus. Il résulte de la formule des projections pour j ,

$$j_!(j^*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mu^* \mathcal{L}_\psi) = (-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A j_! \mu^* \mathcal{L}_\psi$$

que ⓑ et ⓒ sont des isomorphismes de foncteurs. Il reste à montrer que ⓓ est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$.

Pour cela, considérons le revêtement d'Artin-Schreier

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{A}^1_S \times_S (\mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}) \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \swarrow \\ & \mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S} & \end{array}$$

d'équation $t^q - t = xy$ et son prolongement

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad j' \quad} & \tilde{X} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1_S \times_S (\mathbb{P}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\ j\ } & \mathbb{P}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S} & & \end{array}$$

d'équation $X_o T_1^q - X_o T_1 T_o^{q-1} = X_1 T_o^q y$, avec $T_1/T_o = t$, $X_1/X_o = x$; $\tilde{f}$ est fini, galoisien de groupe $\mathbb{F}_q$, totalement ramifié au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$ et étale au-dessus de $\mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$; de plus, $\tilde{X}$ est

lisse sur S .

LEMME 2.4.2. On a un isomorphisme canonique

$$\underline{A}_{\mathbb{P}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}} \oplus \Big(\bigoplus_{\psi' \neq 1} j_! \mu^* \mathcal{L}_{\psi'}\Big) \xrightarrow{\sim} \tilde{f}_* \underline{A}_{\tilde{X}}$$

où $\psi' : \mathbb{F}_q \longrightarrow A^\times$ parcourt les caractères additifs non triviaux.

En effet, puisque f est fini, étale, galoisien de groupe $\mathbb{F}_q$, on a la décomposition

$$\underline{A}_{\mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}} \oplus \Big(\bigoplus_{\psi' \neq 1} \mu^* \mathcal{L}_{\psi'}\Big) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{A}_X \ .$$

D'autre part, il est facile de définir la flèche et, pour montrer le lemme, il reste à vérifier que cette flèche est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$, ce qui résulte aussitôt du fait que $\tilde{f}$ est totalement ramifié au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$.

D'après 2.4.2 la flèche ⓓ est facteur direct de la flèche de changement de base

$$\text{ⓓ'} \qquad \tilde{pr}_1^* \, Ri_*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \tilde{f}_* \underline{A}_{\tilde{X}} \longrightarrow Rj_*(pr_1^*(-) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A f_* \underline{A}_X) \ ,$$

flèche qui se réécrit encore, grâce aux formules des projections pour f et $\tilde{f}$,

$$\text{ⓓ'} \qquad \tilde{f}_* \tilde{f}^* \tilde{pr}_1^* \, Ri_*(-) \longrightarrow \tilde{f}_* Rj'_* \, f^* pr_1^*(-) \ .$$

Par suite, pour terminer la démonstration de A.1, il suffit de montrer que la flèche de changement de base

$$\text{ⓓ''} \qquad (pr_1 \circ \tilde{f})^* Ri_*(-) \longrightarrow Rj'_*(pr_1 \circ f)^*(-) \ ,$$

relative au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle pr_1 \circ f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{pr}_1 \circ \tilde{f}} \\ \mathbb{A}^1_S & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^1_S \end{array}$$

est un isomorphisme.

Si $\tilde{pr}_1 \circ \tilde{f}$ était lisse, la conclusion résulterait aussitôt du théorème de changement de base par un morphisme lisse (cf. [SGA 4] XVI, 1.2). En fait, ce n'est pas le cas, mais nous allons voir que,

au-dessus d'un voisinage U de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$ dans $\mathbb{P}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$, on peut factoriser $\tilde{pr}_1 \circ \tilde{f}$ en un morphisme radiciel surjectif suivi d'un morphisme lisse et, comme la topologie étale est insensible aux morphismes radiciels surjectifs, cela suffit à prouver que (d") est un isomorphisme.

Prenons comme voisinage U de $\infty_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$, la carte $X_1 \neq 0$ de $\mathbb{P}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$, de coordonnées $(\xi = X_0/X_1, y)$; sur $\tilde{f}^{-1}(U) \subset \tilde{X}$, $T_1 \neq 0$ et $(\tau = T_0/T_1, y) : \tilde{f}^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{A}^1_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$ est une immersion ouverte dont le fermé complémentaire a pour équation $\tau^{q-1} = 1$. Alors $\tilde{pr}_1 \circ \tilde{f} | \tilde{f}^{-1}(U)$ a pour expression

$$\tilde{pr}_1 \circ \tilde{f} | \tilde{f}^{-1}(U) : (\tau, y) \longmapsto \xi = \frac{\tau^q y}{1-\tau^{q-1}}$$

et se factorise en un morphisme radiciel surjectif,

$$(\tau, y) \longmapsto (\tau', y') = (\tau^q, \frac{y}{1-\tau^{q-1}}) ,$$

suivi d'un morphisme lisse $(y' \neq 0)$,

$$(\tau', y') \longmapsto \xi = \tau' y' ,$$

d'où la conclusion.

Remarque 2.4.3. Rappelons qu'un morphisme $f : X \longrightarrow S$ est dit fortement localement acyclique relativement à un objet K de $D^+_{t.d.f.}(X,A)$ si pour tout point géométrique x de X, d'image s dans S, toute spécialisation $t \longrightarrow S_{(s)}$ et tout A-module M, la flèche de restriction

$$K_x \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M \longrightarrow R\Gamma(X_{(x)t}, (K|X_{(x)t}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M)$$

est un isomorphisme (cf. [SGA 4½], [Th. Finitude], A.2.9). On dira que f est universellement fortement localement acyclique relativement à K si f est fortement localement acyclique relativement à K et s'il le reste après tout changement de base $S' \longrightarrow S$.

Les arguments développés ci-dessus montrent en fait le résultat plus fort suivant :

THÉORÈME 2.4.4. *La projection* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ *est universellement fortement localement acyclique relativement à* $\mu^* \mathcal{L}_\psi$ *prolongé par* 0 *à* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ *tout entier.*

3. Stratifications et théorème d'uniformité pour les foncteurs $Rf_!$, $D_{X/S}$ et Rf_*.

3.0. Stratifications des schémas. Si X est un schéma, une stratification $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}$ de X est une partition finie

$$X^{red} = \coprod_\alpha X_\alpha$$

de X^{red} par des sous-schémas réduits localement fermés de X (le symbole $\coprod$ est pris ici au sens ensembliste et non au sens schématique ; les X_α ne sont supposés ni irréductibles ni même connexes et peuvent être éventuellement vides). Si $f : X' \longrightarrow X$ est un morphisme de schémas et si $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}$ est une stratification de X, la stratification image réciproque de $\mathcal{X}$ par f est la stratification, notée $\mathcal{X}_{X'}$ ou $f^*\mathcal{X}$ ou même simplement $\mathcal{X}'$, de X' définie par

$$(X')^{red} = \coprod_\alpha (f^{-1}(X_\alpha))^{red} .$$

Soient X un bon schéma et $\mathcal{X}$ une stratification de X. On dira qu'une fonction constructible

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est adaptée à $\mathcal{X}$ si elle est constante sur chaque strate X_α ; pour tout bon X-schéma $f : X' \longrightarrow X$, la fonction constructible

$$\varphi \circ f : X' \longrightarrow \mathbb{Z} ,$$

notée encore $\varphi_{X'}$ ou $\varphi \circ f$ ou même simplement φ', est adaptée à $f^*\mathcal{X}$.

Soient de plus ℓ un nombre premier et $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. On dira qu'un objet K de $D^b_c(X[1/\ell], \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est adapté à $\mathcal{X}$ si tous ses faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i(K)$ sont lisses sur chaque strate $X_\alpha[1/\ell]$.

On notera

$$\chi(K) \quad \text{et} \quad \|K\| : X[1/\ell] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

les fonctions constructibles définies par

$$\chi(K)(x) = \sum_i (-1)^i \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} [\mathcal{H}^i(K)_{\bar{x}}]$$

et

$$\|K\|(x) = \sum_i \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} [\mathcal{H}^i(K)_{\bar{x}}] ,$$

où $\bar{x}$ est un point géométrique arbitraire au-dessus de $x \in X[1/\ell]$; on dira que K est χ-<u>adapté à</u> $\mathcal{X}$ si K est adapté à $\mathcal{X}$ et si la fonction constructible $\chi(K) : X[1/\ell] \longrightarrow \mathbb{Z}$ est adaptée à la stratification $\mathcal{X}[1/\ell]$ de $X[1/\ell]$.

<u>Remarques</u> 3.0.1. Si K est adapté à $\mathcal{X}$, les fonctions $\chi(K)$ et $\|K\|$ sont constantes sur les composantes connexes des strates $X_\alpha[1/\ell]$, aussi bien que chaque fonction $x \longmapsto \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} [\mathcal{H}^i(K)_{\bar{x}}]$, mais, pour des raisons techniques, nous n'avons pas supposé les strates connexes, de sorte qu'il nous faut distinguer entre "adapté" et "χ-adapté".

3.0.2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\chi(K[n]) = (-1)^n \chi(K) \quad \text{et} \quad \|K[n]\| = \|K\| ;$$

pour tout "triangle" (cf. [8], 1.1.2)

$$K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow K'[1]$$

dans $D_c^b(X[1/\ell], \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a

$$\chi(K) = \chi(K') + \chi(K'') \quad \text{et} \quad \|K\| \leqslant \|K'\| + \|K''\| ;$$

enfin, on a

$$\|K\| = 0 \iff K = 0 .$$

3.1. <u>Stratifications et</u> $Rf_!$. Soient Y un bon schéma et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini.

Une $!$-<u>stratification de</u> $f : X \longrightarrow Y$ est un quadruple $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, C, f_!)$, composé d'une stratification $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}$ de X, d'une stratification $\mathcal{Y} = \{Y_\beta\}$ de Y, d'un entier $C \geqslant 1$ et d'une application additive

$$f_! : \left\{ \begin{matrix} \text{fonctions constructibles} \\ X \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ adaptées à } \mathcal{X} \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{fonctions constructibles} \\ Y \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ adaptées à } \mathcal{Y} \end{matrix} \right\}$$

et vérifiant la propriété suivante : pour tout nombre premier ℓ, pour tout $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X[1/\ell],\bar{\Omega}_\ell)$ adapté à $\mathcal{X}$, pour tout bon Y-schéma $g : Y' \longrightarrow Y$ et pour tout facteur direct L de $g_X^*(K)$ dans $D_c^b(X'[1/\ell],\bar{\Omega}_\ell)$, où on a formé le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g_X} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

on a

(i) l'objet $Rf_!L$ de $D_c^b(Y'[1/\ell],\bar{\Omega}_\ell)$ est adapté à $g^*\mathcal{Y}$ et on a l'inégalité

$$\|Rf_!(L)\|(y') \leqslant C. \sup_{f(x')=y'} (\|L\|(x'))\ ,$$

(ii) si L est χ-adapté à $g_X^*\mathcal{X}$, alors $Rf_!L$ est χ-adapté à $g^*\mathcal{Y}$ et

$$\chi(Rf_!L) = f_!\chi(L)$$

au sens suivant : pour toute fonction constructible $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ adaptée à $\mathcal{X}$ induisant $\chi(L)$ sur $X'[1/\ell]$, $f_!\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ induit $\chi(Rf_!L)$ sur $Y'[1/\ell]$.

Remarque 3.1.1. L'application $f_!$, si elle existe, est uniquement déterminée par le morphisme $f : X \longrightarrow Y$; de plus, si $(\mathcal{X},\mathcal{Y},C,f_!)$ est une !-stratification de f, $f_!$ est donnée par la "recette" suivante : choisissons, pour chaque β, un point géométrique arbitraire y_β de Y_β, puis, pour chaque α tel que $f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha$ soit non vide, choisissons un point géométrique arbitraire $x_{\alpha,\beta}$ de $f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha$ et enfin choisissons un nombre premier ℓ distinct des caractéristiques résiduelles des y_β, alors $f_!\varphi$ est la fonction dont la valeur constante sur Y_β est donnée par

$$(f_!\varphi)(y_\beta) = \sum_{\substack{\alpha \text{ tels que} \\ f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha \neq \emptyset}} \varphi(x_{\alpha,\beta})\chi_{\alpha,\beta}$$

avec

$$\chi_{\alpha,\beta} = \sum_i (-1)^i \dim_{\bar{\Omega}_\ell}\left[H_c^i(f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha,\bar{\Omega}_\ell)\right] .$$

Pour $f : X \longrightarrow Y$ comme ci-dessus, on dira qu'une !-stratification $(\mathcal{X},\mathcal{Y},C,f_!)$ est <u>universelle</u> si, pour tout bon Y-schéma $g : Y' \longrightarrow Y$ qui est plat, le morphisme $f' : X' \longrightarrow Y'$, déduit de f par le changement de base

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g_X} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

admet $(g_X^*\mathcal{X},g^*\mathcal{Y},C,g^*f_!)$ comme !-stratification.

THÉORÈME 3.1.2. <u>Soient</u> Y <u>un bon schéma</u>, $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme de type fini et</u> $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}$ <u>une stratification de</u> X . <u>Alors, il existe un entier</u> $N \geqslant 1$, <u>une stratification</u> $\mathcal{Y} = \{Y_\beta\}$ <u>de</u> $Y[1/N]$, <u>un entier</u> $C \geqslant 1$ <u>et une application additive</u> $f_!$ <u>tels que</u> $(\mathcal{X}[1/N],\mathcal{Y},C,f_!)$ <u>soit une</u> !-<u>stratification universelle du morphisme</u>

$$f : X[1/N] \longrightarrow Y[1/N]$$

<u>déduit de</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>en inversant</u> N .

La démonstration de ce théorème sera donnée en Appendice à ce numéro (cf. 3.4.2).

3.2. <u>Stratifications et dualité relative</u>.

THÉORÈME 3.2.1. <u>Soient</u> S <u>un bon schéma</u>, $f : X \longrightarrow S$ <u>un morphisme de type fini et</u> $\mathcal{X}$ <u>une stratification de</u> X . <u>Alors, il existe un entier</u> $N \geqslant 1$, <u>un ouvert dense</u> $U \subset S[1/N]$ <u>et une stratification</u> $\widetilde{\mathcal{X}}$ <u>de</u> X_U <u>ayant la propriété suivante : pour tout nombre premier</u> ℓ , <u>pour tout morphisme étale</u> $X' \longrightarrow X_U[1/\ell]$ <u>et pour tout objet</u> K <u>de</u> $D_c^b(X',\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ <u>qui est adapté à la stratification</u> $\mathcal{X}_{X'}$, <u>on a</u> :

(i) <u>l'objet</u> $D_{X'/U}(K)$ <u>de</u> $D_c^b(X',\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ <u>est adapté à la stratification</u> $\widetilde{\mathcal{X}}_{X'}$,

(ii) <u>la formation de</u> $D_{X'/U}(K)$ <u>commute à tout changement de base</u> $T \longrightarrow U[1/\ell]$, <u>avec</u> T <u>un bon schéma</u>.

La démonstration de ce théorème sera donnée en Appendice à ce numéro (cf. 3.4.3).

COROLLAIRE 3.2.2. <u>Soient</u> S <u>un bon schéma</u>, $f : X \longrightarrow S$ <u>un morphisme de type fini et</u> $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}$ <u>une stratification de</u> X . <u>Alors il existe un entier</u> $N \geqslant 1$, <u>un ouvert dense</u> $U \subset S[1/N]$ <u>et une stratification</u>

$\tilde{\mathcal{X}}$ de X_U ayant la propriété suivante : pour tout nombre premier ℓ, pour tout morphisme étale $X' \longrightarrow X_U[1/\ell]$ et pour tout objet K de $D_c^b(X',\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ adapté à $\mathcal{X}_{X'}$, K est réflexif relativement à U et $D_{X'/U}(K)$ est adapté à la stratification $\tilde{\mathcal{X}}_{X'}$.

En effet, on applique 3.2.1 deux fois : d'abord à $(f : X \longrightarrow S, \mathcal{X})$, ce qui produit un entier $N_1 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_1 \subset S[1/N_1]$ et une stratification $\mathcal{X}_1^{\vee}$ de X_{U_1}, puis on applique 3.2.1 à $(f_{U_1} : X_{U_1} \longrightarrow U_1, \tilde{\mathcal{X}}_1)$, ce qui produit un entier $N_2 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_2 \subset U_1[1/N_2]$ (et une stratification que l'on oublie). Alors $N = N_1N_2$, $U = U_2$ et $\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}_1$ font marcher 3.2.2.

3.3. Stratifications et Rf_*. Soient S un bon schéma, X et Y des S-schémas de type fini,

$$f : X \longrightarrow Y$$

un S-morphisme, $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}$ une stratification de X et $\mathcal{Y} = \{Y_\beta\}$ une stratification de Y. On dira que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est une *-stratification de f relativement à S si, pour tout morphisme étale $Y' \longrightarrow Y$ fournissant le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \\ & & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

le couple de stratifications $(\mathcal{X}_{X'},\mathcal{Y}_{Y'})$ a la propriété suivante : pour tout nombre premier ℓ et pour tout objet K de $D_c^b(X'[1/\ell],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ adapté à $\mathcal{X}_{X'}$, l'objet $Rf_*'K$ de $D_c^b(Y'[1/\ell],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est adapté à $\mathcal{Y}_{Y'}$ et sa formation commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$, avec S' un bon schéma.

Remarque 3.3.1. Il résulte de [13] 1.1 que les fonctions χ des objets $Rf_*'K$ et $Rf_!'K$, pour K comme ci-dessus, coïncident (faire des changements de base $S' \longrightarrow S$, avec S' le spectre d'un corps).

THÉORÈME 3.3.2. Soient S un bon schéma, X et Y des S-schémas de type fini, $f : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme et $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}$ une stratification de X. Alors, il existe un entier $N \geqslant 1$, un ouvert dense

U de $S[1/N]$ et une stratification $\mathcal{Y}$ de Y_U tels que $(\mathcal{X}_{X_U}, \mathcal{Y})$ soit une *-stratification de $f_U : X_U \longrightarrow Y_U$ relativement à U .

En effet, montrons que 3.3.2 résulte de 3.1.2, 3.2.1 et 3.2.2.

Par 3.2.2, il existe un entier $N_1 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_1 \subset S[1/N_1]$ et une stratification $\mathcal{X}_1$ de X_{U_1} tels que, pour tout nombre premier ℓ , pour tout morphisme étale $Y' \longrightarrow Y_{U_1}[1/\ell]$ et pour tout objet K de $D^b_c(X', \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ adapté à $\mathcal{X}_{X'}$, K soit réflexif et $D_{X'/U_1}(K)$ soit adapté à $(\tilde{\mathcal{X}}_1)_{X'}$; grâce à la réflexivité de K , on déduit de (1.1.3) que

$$Rf^!_* K = Rf^!_*(D_{X'/U_1}(D_{X'/U_1}(K))) = D_{Y'/U_1}(Rf^!_!(D_{X'/U_1}(K))) ;$$

on applique alors 3.1.2 à $(f_{U_1} : X_{U_1} \longrightarrow Y_{U_1}, \tilde{\mathcal{X}}_1)$ ce qui produit un entier $N_2 \geqslant 1$ et une stratification $\mathcal{Y}_2$ de $Y_{U_1}[1/N_2]$ tels que $Rf^!_!(D_{X'/U_1}(K))$ soit adapté à $\mathcal{Y}_2$, dès que $Y' \longrightarrow Y_{U_1}[1/\ell]$ se factorise par $Y_{U_1}[1/N_2\ell] \longrightarrow Y_{U_1}[1/\ell]$; enfin on applique 3.2.1 à $Y_{U_1}[1/N_2] \longrightarrow U_1[1/N_2]$ et à $\mathcal{Y}_2$, ce qui produit un entier $N_3 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_3 \subset U_1[1/N_2N_3]$ et une stratification $\tilde{\mathcal{Y}}_2$ de Y_{U_3} . Maintenant, il est clair que $N = N_1N_2N_3$, $U = U_3$ (vu comme ouvert dense de $S[1/N]$) et $\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{Y}}_2$ font marcher 3.3.2.

Prenant un raffinement commun des stratifications produites par 3.1.2 et 3.3.2, on obtient finalement :

COROLLAIRE 3.3.3. Soient S,X,Y,$f : X \longrightarrow Y$ et $\mathcal{X}$ comme dans 3.3.2. Alors, il existe un entier $N \geqslant 1$, un ouvert dense U de $S[1/N]$, une stratification $\mathcal{Y}$ de Y_U , un entier $C \geqslant 1$ et une application additive $f_!$ tels que :

(i) $(\mathcal{X}_{X_U}, \mathcal{Y}, C, f_!)$ soit une !-stratification universelle de $f : X_U \longrightarrow Y_U$,

(ii) $(\mathcal{X}_{X_U}, \mathcal{Y})$ soit une *-stratification de $f : X_U \longrightarrow Y_U$.

Appendice 3.4 : preuve des théorèmes 3.1.2 et 3.2.1.

3.4.1. Lemmes d'existence de stratifications.

LEMME 3.4.1.1. Soient Y un bon schéma et $\mathcal{X}$ une stratification de $\mathbb{A}^1_Y = Y[T]$. Alors, il existe un entier $N \geqslant 1$, une stratification $\mathcal{Y} = \{Y_\beta\}$ de $Y[1/N]$, à strates Y_β normales, connexes et plates sur $\mathbb{Z}$, et, pour chaque β, une décomposition de $\mathbb{A}^1_{Y_\beta}$ en

$$\mathbb{A}^1_{Y_\beta} = (\mathbb{A}^1_{Y_\beta} - D_\beta) \cup D_\beta \ , \ D_\beta = \coprod_{1 \leqslant \nu \leqslant n_\beta} D_{\beta,\nu} \ ,$$

avec D_β (resp. $D_{\beta,\nu}$) un diviseur de $\mathbb{A}^1_{Y_\beta}$, fini étale sur Y_β, de degré d_β (resp. $d_{\beta,\nu}$), défini par un polynôme unitaire $F_\beta(T)$ (resp. $F_{\beta,\nu}(T)$) de degré d_β (resp. $d_{\beta,\nu}$), à coefficients dans $\Gamma(Y_\beta, \mathcal{O}_{Y_\beta})$, dont le discriminant est inversible sur Y_β, et avec

$$F_\beta(T) = \prod_{\nu=1}^{n_\beta} F_{\beta,\nu}(T) \ ,$$

tels que la stratification de $\mathbb{A}^1_{Y[1/N]}$,

$$\mathbb{A}^1_{Y[1/N]} = \coprod_\beta \left\{ (\mathbb{A}^1_{Y_\beta} - D_\beta) \amalg \left(\coprod_{1 \leqslant \nu \leqslant n_\beta} D_{\beta,\nu} \right) \right\} \ ,$$

soit plus fine que la stratification $\mathcal{X}[1/N]$.

En effet, cela résulte, par récurrence noethérienne sur Y, de [11] 4.2.

Nous dirons qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est très élémentaire s'il est Y-isomorphe soit à

$$D \longrightarrow Y \ ,$$

soit à

$$\mathbb{A}^1_Y - D \longrightarrow Y \ ,$$

où $D \subset \mathbb{A}^1_Y$ est soit vide soit fini étale de degré $d \geqslant 1$ sur Y et défini dans $\mathbb{A}^1_Y$ par un polynôme unitaire de degré d, à coefficients dans $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ dont le discriminant est inversible sur Y.

Nous dirons qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration très élémentaire (de longueur $\leqslant n$) s'il admet une factorisation en une suite finie (d'au plus n) morphismes très élémentaires.

LEMME 3.4.1.2. Soient Y un bon schéma, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini et $\mathcal{X}$ une stratification de X. Alors, il existe un entier $N \geqslant 1$, une stratification $\mathcal{Y} = \{Y_\beta\}$ de $Y[1/N]$, à strates Y_β plates sur $\mathbb{Z}$, et, pour chaque β, une stratification

$$f^{-1}(Y_\beta)^{red} = \coprod_{1 \leqslant \nu \leqslant n_\beta} X_{\beta,\nu}$$

de $f^{-1}(Y_\beta)$, tels que

(i) la stratification de $X[1/N]$,

$$X[1/N]^{red} = \coprod_{\beta,\nu} X_{\beta,\nu} ,$$

est plus fine que la stratification $\mathcal{X}[1/N]$,

(ii) pour tout β et tout ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n_\beta$, le morphisme $f : X_{\beta,\nu} \longrightarrow Y_\beta$ est une fibration très élémentaire.

En effet, on peut supposer que f est la restriction de la projection canonique $\mathbb{A}^1_Y \longrightarrow Y$ à un sous-schéma fermé $X \subset \mathbb{A}^1_Y$ (dévissages usuels : couper Y en morceaux, couper X en morceaux, factoriser f). Alors, soit $X = \mathbb{A}^1_Y$ et la conclusion résulte aussitôt de 3.4.1.1, soit $X \neq \mathbb{A}^1_Y$. Dans ce dernier cas, on peut supposer de plus Y normal, connexe et plat sur $\mathbb{Z}$, de point générique η (récurrence noethérienne sur Y). Au-dessus de η, qui est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, $(X^{red})_\eta$ est soit $\mathbb{A}^1_\eta$ tout entier, soit un sous-schéma de $\mathbb{A}^1_\eta$ fini, étale sur η, défini par un polynôme unitaire à discriminant inversible. Cette situation se propage au-dessus d'un voisinage de η dans Y et on conclut par récurrence noethérienne sur Y.

3.4.2. Démonstration du théorème 3.1.2.

Grâce au lemme 3.4.1.2, il suffit de démontrer 3.1.2 pour $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme très élémentaire, avec Y plat sur $\mathbb{Z}$, et pour la stratification $\mathcal{X}$ triviale, $\mathcal{X} = \{X\}$.

Le cas $X = D \longrightarrow Y$ est trivial (f est fini étale de degré $d \geqslant 0$) : on prend $N = 1$, $\mathcal{Y} = \{Y\}$, $C = d$ et, si $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ est adaptée à $\mathcal{X}$, i.e. constante de valeur a, on prend pour $f_!\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction constante de valeur ad (la platitude de Y sur $\mathbb{Z}$ ne sert pas dans ce cas).

Il reste le cas $X = \mathbb{A}^1_Y - D \longrightarrow Y$ (D est fini étale de degré $d \geqslant 0$) : on prend alors $N = 1$, $\mathcal{Y} = \{Y\}$, $C = d+1$ et, pour $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$

adaptée à χ, i.e. constante de valeur a, on prend pour $f_!\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction constante de valeur $(1-d)a$; pour voir que $N, \psi, C, f_!$ font marcher 3.1.2 dans ce cas, on remarque que, Y étant plat sur $\mathbb{Z}$, tout objet K de $D_c^b(X[1/\ell], \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est à cohomologie lisse est automatiquement à cohomologie modérément ramifiée le long de $D[1/\ell]$ et le long de la section à l'infini de $\mathbb{A}^1_Y$ (cf. [11] 4.7.1). Après, tout changement de base $Y' \longrightarrow Y[1/\ell]$, tout facteur direct L de $K_{Y'}$ est encore à cohomologie lisse sur $X_{Y'}$ et modérément ramifié le long de $D_{Y'}$, et de la section à l'infini de $\mathbb{A}^1_{Y'}$. Il en résulte (cf. [11] 4.7.1) que les faisceaux de cohomologie de $Rf_!^!L$ sont lisses sur Y' et que la fonction χ de $Rf_!^!L$ est donnée par

$$\chi(Rf_!^!L)(y') = (1-d)\chi(L)(x')$$

pour tout $x' \in X'$ d'image y' dans Y'.

Pour contrôler $\|Rf_!^!L\|$ on utilise les faits suivants : pour un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse $\mathfrak{F}$ sur $(\mathbb{A}^1_{Y'}, -D_{Y'})[1/\ell]$, alors seuls $R^1f_!^!\mathfrak{F}$ et $R^2f_!^!\mathfrak{F}$ peuvent être non nuls et le rang de $R^2f_!^!\mathfrak{F}$ en $y' \in Y'[1/\ell]$ est borné par le rang de $\mathfrak{F}$ sur $\mathbb{A}^1_{y'}, -D_{y'}$. Soit donc y' un point de $Y'[1/\ell]$ et x' un point de $(\mathbb{A}^1_{Y'}, -D_{Y'})[1/\ell]$ au-dessus de y', i.e. un point de $\mathbb{A}^1_{y'}, -D_{y'}$; on a alors

$$\|Rf_!^!(L)\|(y') = \sum_i \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[R^if_!^!(L)_{y'}]$$

$$\leqslant \sum_{i,j} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[R^if_!^!(\mathcal{H}^j(L))_{y'}]$$

(suite spectrale d'hypercohomologie), donc

$$\|Rf_!^!(L)\|(y') \leqslant \sum_j \Big(\sum_{i=1}^{2} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[R^if_!^!(\mathcal{H}^j(L))_{y'}]\Big)$$

or, pour $\mathfrak{F}$ un quelconque des $\mathcal{H}^j(L)$, on a

$$\sum_{i=1}^{2} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[(R^if_!^!\mathfrak{F})_{y'}] = -\chi(Rf_!^!\mathfrak{F})(y') + 2\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[(R^2f_!^!\mathfrak{F})_{y'}]$$

$$= (d-1)\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{F}_{x'}) + 2\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[(R^2f_!^!\mathfrak{F})_{y'}]$$

$$\leqslant (d-1)\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{F}_{x'}) + 2\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{F}_{x'})$$

d'où

$$\|Rf_!^!L\|(y') \leqslant (d+1)\|L\|(x')$$

ce qui achève la preuve de 3.1.2.

3.4.3. Démonstration du théorème 3.2.1.

On peut remplacer X,S par X^{red}, S^{red} sans rien changer. Pour tout bon schéma réduit, il existe un entier $N \geqslant 1$ et un ouvert dense U de $S[1/N]$ qui est normal et plat sur $\mathbb{Z}$, et donc réunion disjointe de ses composantes irréductibles ; travaillant séparément sur chaque composante irréductible, on est donc ramené à montrer le théorème 3.2.1 dans le cas où $S = Spec(R)$, avec R un anneau intègre, normal, de corps des fractions k de caractéristique 0.

On procède maintenant par récurrence sur la dimension de $X \otimes_R k$.

Si $\dim(X \otimes_R k) = 0$, $X \otimes_R k$ est fini étale sur k, ainsi que $X_\alpha \otimes_R k$ pour chaque strate X_α de la stratification donnée $\mathcal{X}$ de X. Cette situation se propage sur un ouvert dense U de S ; alors $N = 1$, U et $\widetilde{\mathcal{X}} = \{(X_\alpha)_U\}$ font marcher 3.2.1.

Si $\dim(X \otimes_R k) > 0$, soient $x_1,\dots,x_r$ les points maximaux de X. Quitte à remplacer S par un ouvert dense de S, on peut supposer que, pour chaque $i = 1,\dots,r$, l'anneau local de X en x_i est un corps de type fini sur k (rappelons que X est réduit), de sorte qu'il existe un voisinage ouvert V_i de x_i dans X lisse sur R et contenu dans la strate de $\mathcal{X}$ passant par x_i. Posons alors

$$V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i \quad , \quad Y = (X-V)^{red} \ ;$$

V est un ouvert de X et $\dim(Y \otimes_R k) < \dim(X \otimes_R k)$; de plus, tout complexe K adapté à $\mathcal{X}$ est aussi adapté à la stratification $\mathcal{X}'$ de X donnée par

$$X = V \amalg \coprod_\alpha (X_\alpha \cap Y) \ .$$

Par récurrence, le théorème 3.2.1 est démontré pour Y muni de la stratification $\mathcal{X}_Y = \{X_\alpha \cap Y\}$, donc il existe $U_1 \subset S$ ouvert dense et une stratification $\mathcal{Y}_1$ de Y faisant marcher 3.2.1 pour $(Y_{U_1} \longrightarrow U_1, \mathcal{X}_Y)$.

Le point central de la démonstration est alors le suivant : par la résolution des singularités appliquée à $V \otimes_R k \hookrightarrow X \otimes_R k$ (cf. [10]), on sait qu'il existe un ouvert dense $U_2 \subset U_1 \subset S$ et un diagramme dont chaque carré est cartésien

$$(3.4.3.1)\qquad \begin{array}{ccccc} \bar{V} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & D \\ \| & & \downarrow\pi & & \downarrow\pi_D \\ V_{U_2} & \xrightarrow{j} & X_{U_2} & \xleftarrow{i} & Y_{U_2} \end{array}$$

avec π propre, $\bar{X}$ lisse sur U_2 et D un diviseur dans $\bar{X}$ à croisements normaux relativement à U_2.

Désignons par $\mathcal{S}$ la stratification canonique de D (localement pour la topologie étale, $D^{red} = \bigcup_i D_i$, avec D_i irréductible et lisse sur U_2, et $\mathcal{S}$ est décrite comme la famille des différences successives dans la suite décroissante de fermés

$$D^{red} = \bigcup_i D_i \supset \bigcup_{i\neq j} (D_i \cap D_j) \supset \bigcup_{i\neq j\neq k} (D_i \cap D_j \cap D_k) \supset \ldots) .$$

Le théorème 3.1.2 appliqué à $(\pi_D : D \longrightarrow Y_{U_2}, \mathcal{S})$ nous fournit un entier $N \geqslant 1$ et une stratification $\mathcal{Y}_2$ de $Y_{U_2}[1/N]$ tels que $(\mathcal{S}[1/N], \mathcal{Y}_2)$ soit une !-stratification universelle pour π_D (on oublie C et $\pi_{D!}$).

Nous prétendons maintenant que ce $N \geqslant 1$, l'ouvert dense $U = U_2[1/N]$ de $S[1/N]$ et la stratification

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{V_{U_2}[1/N], ((\mathcal{Y}_1)_{U_2}[1/N]) \cap \mathcal{Y}_2\}$$

font marcher 3.2.1.

Notons d'abord que pour $X' \longrightarrow X$ étale, le diagramme déduit de (3.4.3.1) par le changement de base $X' \longrightarrow X$ vérifie toujours les mêmes conditions ; ceci nous permet dans la suite de nous limiter au cas $X' = X$.

Soit donc K un objet de $D^b_c(X[1/\ell], \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ adapté à la stratification $\mathcal{X}' = \{V, \{X_\alpha \cap Y\}\}$. La "suite exacte", où $K_U = K|X_U[1/\ell]$,

$$0 \longrightarrow j_! j^* K_U \longrightarrow K_U \longrightarrow i_* i^* K_U \longrightarrow 0$$

donne un "triangle"

$$D_{X_U/U}(i_* i^* K_U) \longrightarrow D_{X_U/U}(K_U) \longrightarrow D_{X_U/U}(j_! j^* K_U)$$

(cf. [8] 1.1.2 pour la notion de "triangle" ou "suite exacte"), dans lequel on a, par dualité de Verdier (cf. (1.1.3)),

$$\begin{cases} D_{X_U/U}(i_*i^*K_U) = i_*D_{Y_U/U}(i^*K_U) \\ D_{X_U/U}(j_!j^*K_U) = Rj_*D_{V_U/U}(j^*K_U) \ . \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, $D_{Y_U/U}(i^*K_U)$ est adapté à la stratification $(\mathcal{Y}_1)_U[1/\ell]$ de $Y_U[1/\ell]$ et sa formation est compatible à tout changement de base $T \longrightarrow U[1/\ell]$, avec T bon. Il résulte trivialement de ceci, puisque i est une immersion fermée, que $D_{X_U/U}(i_*i^*K_U)$ est adapté à la stratification $\tilde{\mathcal{X}}$ de X_U et que sa formation est compatible à tout changement de base $T \longrightarrow U$ avec T bon.

Il reste donc à prouver que $Rj_*D_{V_U/U}(j^*K_U)$ est adapté à $\tilde{\mathcal{X}}$ et que sa formation commute à tout changement de base $T \longrightarrow U[1/\ell]$, avec T bon.

Sur $V_U[1/\ell]$, j^*K_U est à cohomologie lisse et, V_U/U étant lisse, $D_{V_U/U}(j^*K_U)$ est aussi à cohomologie lisse et sa formation commute à tout changement de base $T \longrightarrow U[1/\ell]$, avec T bon.

Pour contrôler ce qui se passe sur $X_U - V_U$, on se sert de la factorisation $j = \pi \circ \bar{j}$ (cf. (3.4.3.1)), ce qui donne

$$Rj_*D_{V_U/U}(j^*K_U) = R\pi_*R\bar{j}_*D_{V_U/U}(j^*K_U)$$

puis, comme π est propre, le théorème de changement de base propre (cf. [SGA 4] XII 5.1) dit que

$$i^*Rj_*D_{V_U/U}(j^*K_U) = R\pi_{D!}(\bar{i}^*R\bar{j}_*D_{V_U/U}(j^*K_U)) \ .$$

Par 3.1.2, appliqué à π_D, on est ramené, pour achever la preuve de 3.2.1, à vérifier le point suivant : si $L \in \mathrm{ob}\, D^b_c(V_U[1/\ell], \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est à cohomologie lisse (ici $L = D_{V_U/U}(j^*K_U)$), l'objet $\bar{i}^*R\bar{j}_*L$ de $D^b_c(D_U[1/\ell], \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est adapté à la stratification $\mathcal{D}_U$ de D_U et de formation compatible à tout changement de base $T \longrightarrow U[1/\ell]$ avec T bon.

Or, ceci est bien connu : U étant irréductible avec point générique de caractéristique 0, les faisceaux de cohomologie de L sur $(\bar{X}_U - D_U)[1/\ell]$ sont automatiquement modérément ramifiés le long de $D_U[1/\ell]$ (cf. [SGA 1] XIII) et on peut appliquer [SGA 4½], [Th. Finitude], A.1.3.3.

4. Un théorème d'uniformité pour la transformation de Fourier.

4.0. Soient S un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, $E \xrightarrow{\pi} S$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$, $E^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} S$ son fibré vectoriel dual et $\mu : E \times_S E^\vee \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$ l'accouplement canonique.

Pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, pour tout nombre premier ℓ inversible dans $\mathbb{F}_q$ et pour tout caractère additif non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ on dispose du foncteur transformation de Fourier (cf. (2.1.4))

$$\mathcal{F}_{S\otimes\mathbb{F}_q,\psi} : D^b_c(E_{S\otimes\mathbb{F}_q},\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D^b_c(E^\vee_{S\otimes\mathbb{F}_q},\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \ ;$$

plus généralement, si $T \longrightarrow S$ est un morphisme avec T un bon $\mathbb{F}_q$-schéma, on dispose du foncteur transformation de Fourier

$$\mathcal{F}_{T,\psi} : D^b_c(E_T,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D^b_c(E^\vee_T,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \ .$$

THÉORÈME 4.1. *Soit, de plus, $\mathcal{S} = \{E_\alpha\}$ une stratification de E. Alors il existe un entier $N \geqslant 1$, une stratification $\mathcal{S}^\vee = \{E^\vee_\beta\}$ de $E^\vee[1/N]$, à strates $E^\vee_\beta$ non vides et plates sur $\mathbb{Z}$, et une application additive*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fonctions constructibles}\\ E[1/N] \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ adaptées}\\ \text{à } \mathcal{S}[1/N]\end{array}\right\} \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^\vee} \left\{\begin{array}{c}\text{fonctions constructibles}\\ E^\vee[1/N] \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ adaptées}\\ \text{à } \mathcal{S}^\vee[1/N]\end{array}\right\}$$

ayant la propiété suivante : pour tout nombre premier ℓ, pour tout morphisme étale $S' \longrightarrow S[1/N\ell]$, pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ tel que $S'\otimes\mathbb{F}_q \neq \emptyset$, pour tout $\mathbb{F}_q$-morphisme $T \longrightarrow S'\otimes\mathbb{F}_q$ avec T un bon $\mathbb{F}_q$-schéma, pour tout caractère additif non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, pour tout objet K de $D^b_c(E_{S'},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ adapté à $\mathcal{S}_{S'}$ et pour tout facteur direct L de K_T dans $D^b_c(E_T,S')$, le transformé de Fourier

$$\mathcal{F}_{T,\psi}(K) \in \mathrm{ob}\ D^b_c(E^\vee_T,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est adapté à $\mathcal{S}^\vee_T$ et, si, de plus, L est χ-adapté à $\mathcal{S}_T$, $\mathcal{F}_{T,\psi}(L)$ est aussi χ-adapté à $\mathcal{S}^\vee_T$ et on a (au sens de 3.1 (ii))

$$\chi(\mathcal{F}_{T,\psi}(L)) = (\chi(L))^\vee \ .$$

Remarque 4.1.1. L'application $\varphi \longmapsto \varphi^\vee$, si elle existe, est uniquement déterminée par $E \longrightarrow S$. De plus, pour $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^\vee$ comme ci-dessus, elle est donnée par la "recette" suivante : pour chaque α, soit x_α un point géométrique de $E_\alpha[1/N]$, pour chaque β, soient y_β un point géométrique de $E^\vee_\beta$, s_β le point géométrique de S en-dessous de y_β (i.e. $s_\beta = \check{\pi}(y_\beta)$) et u_β un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_{s_\beta}$, soit ℓ un nombre premier distinct des caractéristiques résiduelles des s_β, alors

$$\varphi^\vee(y_\beta) = \sum_\alpha \varphi(x_\alpha).[\chi_{\alpha,\beta} - \chi'_{\alpha,\beta}]$$

avec

$$\chi_{\alpha,\beta} = \sum_i (-1)^i \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[H^i_c((E_\alpha)_{s_\beta}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

et

$$\chi'_{\alpha,\beta} = \sum_i (-1)^i \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}[H^i_c((E_\alpha)_{s_\beta} \cap H_{y_\beta,u_\beta}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

où H_{y_β,u_β} est l'hyperplan géométrique de E_{s_β} d'équation $\mu(x,y_\beta) = t_\beta$.

COROLLAIRE 4.2. *On suppose de plus* S *intègre, avec point générique de caractéristique zéro, et soit encore* $\mathcal{S} = \{E_\alpha\}$ *une stratification de* E. *Alors, il existe un ouvert dense* $U^\vee \subset E^\vee$ *de* $E^\vee$ *vérifiant la condition suivante : pour tout nombre premier* ℓ, *pour tout morphisme étale* $S' \longrightarrow S[1/\ell]$, *pour tout corps fini* $\mathbb{F}_q$ *tel que* $S' \otimes \mathbb{F}_q \neq \emptyset$, *pour tout* $\mathbb{F}_q$*-morphisme* $T \longrightarrow S' \otimes \mathbb{F}_q$ *avec* T *un bon* $\mathbb{F}_q$*-schéma et* $U^\vee_T \neq \emptyset$, *pour tout caractère additif non trivial* $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times_\ell$, *pour tout objet* K *de* $D^b_c(E_{S'}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *qui est pervers relativement à* S' *et adapté à* $\mathcal{S}_{S'}$ *et pour tout facteur direct* L *de* K_T *dans* $D^b_c(E_T, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, *on a :*

(i) *les faisceaux de cohomologie de*

$$\mathcal{F}_{T,\psi}(L)|U_T \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{T,\bar{\psi}}(D_{E_T/T}(L))|U_T$$

sont tous nuls sauf ceux en dimension $-r$; *les* $\mathcal{H}^{-r}$ *sont lisses sur* U_T *et en dualité parfaite à valeurs dans le faisceau constant* $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ *sur* U_T,

(ii) si on suppose que L est χ-adapté à $\mathcal{S}_T$, alors le rang commun des $\mathcal{H}^{-r}$ est constant sur U_T,

(iii) si on suppose que T est de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et que L est pur, de poids m, relativement à T, alors les $\mathcal{H}^{-r}$ sont ponctuellement purs de poids m et $-m$ respectivement.

Remarque 4.2.1. Pour L comme en 4.2 (ii), le rang commun des $\mathcal{H}^{-r}$ est donné par la recette suivante : soit $\tilde{L}$ un objet quelconque de $D^b_c(E[1/\ell],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est χ-adapté à $\mathcal{S}$ et dont la fonction χ induit celle de L sur E_T ; notons $\bar{\eta}$ un point géométrique générique de S, u un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_{\bar{\eta}}$ et y un point géométrique générique de $E^\vee_{\bar{\eta}}$; notons $H_{y,u}$ l'hyperplan générique géométrique de $E_{\bar{\eta}}$ d'équation $\mu(x,y) = u$, alors

$$\operatorname{rang} \mathcal{H}^{-r} = (-1)^r[\chi_c(E_{\bar{\eta}},\tilde{L}) - \chi_c(H_{y,u},\tilde{L})] .$$

4.2.2. Preuve du corollaire. Prenons une stratification $\mathcal{S}^\vee$ de $E^\vee[1/N]$, pour un certain $N \geqslant 1$, faisant marcher 4.1 et prenons pour $U^\vee$ un ouvert de $E^\vee$ qui contient le point générique $\delta^\vee$ de $E^\vee$ et qui est contenue dans l'unique strate $E^\vee_\beta$ qui contient $\delta^\vee$. L'énoncé est maintenant une conséquence formelle de 4.1 et de 2.3.1 ; de même la remarque 4.2.1 résulte formellement de la remarque 4.1.1.

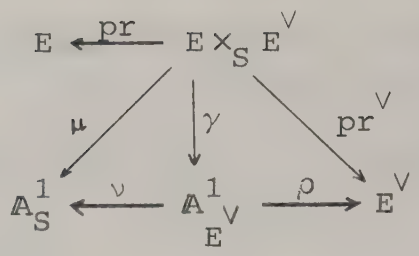
4.3. Preuve du théorème 4.1. On se sert de l'analogue cohomologique de la formule classique (factorisation de la transformation de Fourier par la transformation de Radon) :

$$\hat{f}(y) \overset{\text{dfn}}{=\!=} \int_{\mathbb{R}^r} f(x)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iu}\left[\int_{\langle x,y\rangle=u} f(x)dx\right]du .$$

Désignons par $pr : E\times_S E^\vee \longrightarrow E$, $pr^\vee : E\times_S E^\vee \longrightarrow E^\vee$ les deux projections, par $\nu : \mathbb{A}^1_{E^\vee} \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$, $\rho : \mathbb{A}^1_{E^\vee} \longrightarrow E^\vee$ les morphismes canoniques et par

$$\gamma : E\times_S E^\vee \longrightarrow \mathbb{A}^1_{E^\vee} = \mathbb{A}^1_S \times_S E^\vee$$

le morphisme défini par $\gamma(x,y) = (\mu(x,y),y)$; on a alors un diagramme commutatif de S-schémas



et, par la formule des projections, on a

$$(4.3.1) \qquad \mathfrak{F}_{T,\psi}(L) = R\rho_{T!}[(R\gamma_{T!}pr_T^*L)\otimes \nu_T^*\mathcal{L}_\psi] \ ;$$

c'est l'analogue cohomologique voulu.

Pour se servir de (4.3.1) pour démontrer 4.1, on applique d'abord 3.1.2 au morphisme $\gamma : E\times_S E^\vee \longrightarrow \mathbb{A}^1_{E^\vee}$ et à la stratification $pr^*\mathcal{S}$ de $E\times_S E^\vee$; ceci nous donne un entier $N_1 \geqslant 1$ et une stratification $\mathcal{X}$ de $\mathbb{A}^1_{E^\vee}[1/N_1]$ qui contrôle $R\gamma_! pr_T^*$. Pour contrôler $\mathfrak{F}_{T,\psi}(L)$ on applique alors 3.4.1 à $Y = E^\vee[1/N_1]$ et à la stratification $\mathcal{X}$ de $\mathbb{A}^1_{E^\vee}[1/N_1]$; ceci nous donne un entier $N_2 \geqslant 1$ et une stratification $\mathcal{S}^\vee$ de $Y[1/N_2] = E^\vee[1/N_1N_2]$. Que $N = N_1N_2 \geqslant 1$ et $\mathcal{S}^\vee$ (stratification de $E^\vee$ à strates normales connexes et plates sur $\mathbb{Z}$) fassent marcher 4.1 résulte alors du lemme suivant :

LEMME 4.3.2. *Soient* Y *un schéma de type fini et plat sur* $\mathbb{Z}$ *et*

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{A}^1_Y - D, D_1, \ldots, D_n\} \quad , \quad D = \coprod_{i=1}^{n} D_i$$

une stratification de $\mathbb{A}^1_Y$ *, avec* $D_1,\ldots,D_r$ *des diviseurs dans* $\mathbb{A}^1_Y$ *, finis étales sur* Y *, de rangsconstants* $d_1,\ldots,d_r$ *. Pour tout corps fini* $\mathbb{F}_q$ *, pour tout* $\mathbb{F}_q$*-morphisme* $T \longrightarrow Y\otimes \mathbb{F}_q$ *, avec* T *un bon* $\mathbb{F}_q$*-schéma, pour tout nombre premier* ℓ *inversible dans* $\mathbb{F}_q$ *, pour tout caractère additif non trivial* $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ *, pour tout objet* K *de* $D^b_c(\mathbb{A}^1_Y[1/\ell],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *adapté à* $\mathcal{X}$ *et pour tout facteur direct* L *de* K_T *dans* $D^b_c(\mathbb{A}^1_T,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$*, on a alors :*

(i) *l'objet* $R\rho_{T!}(L\otimes \mathcal{L}_\psi)$ *de* $D^b_c(T,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$*, où* $\rho_T : \mathbb{A}^1_T \longrightarrow T$ *est la projection canonique et* $\mathcal{L}_\psi$ *le* $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$*-faisceau d'Artin-Schreier associé à* ψ *sur* $\mathbb{A}^1_T$ (cf. 2.0)*, est à cohomologie lisse sur* T *,*

(ii) *si on suppose que* L *est* χ*-adapté à* $\mathcal{X}_T$ *, alors la fonction* χ *de* $R\rho_{T!}(L\otimes \mathcal{L}_\psi)$ *sur* T *est constante de valeur* (*pour tout* $t \in T$):

(a) $$\chi(R\rho_{T!}(L\otimes\mathcal{L}_\psi))(t) = \chi(R\rho_!\tilde{L})(y) - \chi(\tilde{L})(x)$$

pour un choix arbitraire d'un $\tilde{L}\in \mathrm{ob}\, D^b_c(\mathbb{A}^1_Y[1/\ell],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ χ-adapté à χ, dont la fonction χ induit celle de L, et de points $x\in\mathbb{A}^1_Y[1/\ell]$, $y\in Y[1/\ell]$ (en particulier, on peut prendre $x\in\mathbb{A}^1_Y(C)$, $y\in Y(\mathbb{C})$);

(b) $$\chi(R\rho_{T!}(L\otimes\mathcal{L}_\psi))(t) = -da + \sum_{i=1}^{r} d_i\, a_i$$

où a (resp. a_i) est la valeur constante de $\chi(L)$ sur $\mathbb{A}^1_T - D_T$ (resp. $D_{i,T}$ pour $i=1,\dots,n$) et où $d=\sum_{i=1}^{r} d_i$ est le degré constant de D sur Y.

4.3.3. Preuve de 4.3.2. La platitude sur $\mathbb{Z}$ de Y assure que K est modérément ramifié le long de $D[1/\ell]$ et de la section à l'infini de $\mathbb{A}^1_Y[1/\ell]$ (cf. [8] 4.7.1) ; par suite, L sur $\mathbb{A}^1_T$ est aussi modérément ramifié le long de D_T et de la section à l'infini de $\mathbb{A}^1_T$. D'autre part, $\mathcal{L}_\psi$ est lisse de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_T$, avec conducteur de Swan constant 1 le long de la section à l'infini de $\mathbb{A}^1_T$ ($\mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{L}_\psi|\mathbb{A}^1_t) = 1$, pour tout point géométrique t de T). La lissité des faisceaux de cohomologie de $R\rho_{T!}(L\otimes\mathcal{L}_\psi)$ sur T est donc un cas particulier du théorème de semi-continuité du conducteur de Swan, démontré par Deligne (cf. [12] 2.1.2).

Les formules pour $\chi(R\rho_{T!}(L\otimes\mathcal{L}_\psi))$ résultent de la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič ([15] et [11] 4.8.2) : pour t un point géométrique de T et $\bar{\eta}$ un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_t$, on a par modération des $\mathcal{H}^j(L)$,

$$\begin{aligned}\chi(R\rho_{T!}(\mathcal{H}^j(L)\otimes\mathcal{L}_\psi))(t) &= \chi(R\rho_{T!}\mathcal{H}^j(L))(t) - \mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{L}_\psi).\chi(\mathcal{H}^j(L))(\bar{\eta}) \\ &= \chi(R\rho_{T!}\mathcal{H}^j(L))(t) - \chi(\mathcal{H}^j(L))(\bar{\eta})\end{aligned}$$

d'où

$$\chi(R\rho_{T!}(L\otimes\mathcal{L}_\psi))(t) = \chi(R\rho_{T!}L)(t) - \chi(L)(\bar{\eta})$$

ce qui achève la démonstration de 4.3.2 et par conséquent celle de 4.1 et de la remarque 4.1.1.

Remarque 4.3.4. On a aussi le complément suivant à l'assertion (i) de 4.3.2, complément qui, associé à 3.1.2, donne en principe des

estimations pour le degré total des fonctions L associées aux sommes trigonométriques :

pour tout $t \in T$, on a l'inégalité

$$\|R\rho_{T!}(L\otimes \mathcal{L}_\psi)\|(t) \leqslant 2d \sup_{x\in \mathbb{A}^1_t} \|L\|(x)$$

où d est, comme en (ii), le degré constant de $D \longrightarrow Y$.

En effet, on utilise les faits suivants (cf. [11] 4.8) : pour un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{A}^1_t$ qui est adapté à $(\mathbb{A}^1_t - D_t, D_{1,t}, \ldots, D_{n,t})$, on a

$$H^2_c(\mathbb{A}^1_t, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}_\psi) = 0$$

et

$$\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(H^0_c(\mathbb{A}^1_t, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}_\psi)) \leqslant \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(H^0_c(D_t, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}_\psi))$$

$$\leqslant \sum_{x\in D_t} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{F}_x) ,$$

et, par suite, on a

$$\sum_i \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(H^i_c(\mathbb{A}^1_t, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}_\psi)) = -\chi_c(\mathbb{A}^1_t, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}_\psi) + 2 \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(H^0_c(\mathbb{A}^1_t, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}_\psi))$$

$$= d.\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) - \sum_{x\in D_t} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{F}_x) + 2 \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(H^0_c(\mathbb{A}^1_t, \mathcal{F}\otimes \mathcal{L}_\psi))$$

$$\leqslant d.\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) + \sum_{x\in D_t} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{F}_x) .$$

Pour $t \in T$, on a donc

$$\|R\rho_{T!}(L\otimes \mathcal{L}_\psi)\|(t) \leqslant \sum_{i,j} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(H^i_c(\mathbb{A}^1_t, \mathcal{H}^j(L)\otimes \mathcal{L}_\psi)$$

$$\leqslant \sum_j [d.\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{H}^j(L)_{\bar{\eta}}) + \sum_{x\in D_t} \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{H}^j(L)_x)]$$

d'où

$$\|R\rho_{T!}(L\otimes \mathcal{L}_\psi)\|(t) \leqslant \sum_{x\in D_t} [\|L\|(\bar{\eta}) + \|L\|(x)]$$

et la conclusion.

5. Une première application du théorème d'uniformité de la transformation de Fourier aux sommes trigonométriques.

5.0. Soient $R \subset \mathbb{C}$ une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{C}$ de type fini, r un entier ≥ 0, $\mathbb{A}^r_R$ l'espace affine standard de coordonnées $x_1,\dots,x_r$ sur R, X un R-schéma affine, lisse, purement de dimension relative m, et

$$f = (f_1,\dots,f_r) : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R$$

un R-morphisme fini. Fixons d'autre part une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$.

Les données ci-dessus sont les données "fixes" ; à ces données fixes, nous adjoindrons des données "mobiles" :

- une fonction inversible g sur X (éventuellement $g \equiv 1$) qui sera aussi vue comme un R-morphisme $g : X \longrightarrow \mathbb{G}_{m,R}$,

- un quintuple $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ composé d'un corps fini $\mathbb{F}_q$, d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{F}_q$ avec $\varphi(1) = 1$, d'un élément $\underline{a} = (a_1,\dots,a_r)$ de $(\mathbb{F}_q)^r$, d'un caractère additif non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ et d'un caractère multiplicatif (éventuellement trivial) $\chi : \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$.

Nous noterons $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^r_{\mathbb{C}}$ et $g_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ les morphismes de $\mathbb{C}$-schémas $f \otimes_R \mathbb{C}$ et $g \otimes_R \mathbb{C}$; plus généralement, pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \longrightarrow k$, avec $\varphi(1) = 1$, nous noterons $f_\varphi : X_\varphi \longrightarrow \mathbb{A}^r_k$ et $g_\varphi : X_\varphi \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ les morphismes de k-schémas $f \otimes_{R,\varphi} k$ et $g \otimes_{R,\varphi} k$.

5.1. Le R-morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R$ étant fixé comme en 5.0, à toute fonction inversible g sur X et à tout quintuple $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ comme en 5.0, on associe la famille de sommes trigonométriques $(S_n)_{n\geq 1}$ (n entier), avec

$$S_n = S_n(g,\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi) = \sum_{x \in X_\varphi(\mathbb{F}_{q^n})} \psi_n\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot f_{i,\varphi}(x)\Big)\chi_n(g_\varphi(x)) ,$$

où $\psi_n = \psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}$ et $\chi_n = \chi \circ \mathrm{Nr}_{\mathbb{F}^\times_{q^n}/\mathbb{F}^\times_q}$, et on associe la fonction L définie par

$$L(T) = L(g,\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi;T) = \exp\Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{T^n}{n} S_n\Big) .$$

THÉORÈME 5.2. *Pour tout* R-*morphisme* $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R$ *comme en* 5.0, *il existe un polynôme non nul* $F(y_1,\ldots,y_r) \in R[y_1,\ldots,y_r]$ *ayant la propriété suivante : pour toute fonction inversible* g *sur* X *et pour tout quintuple* $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$, *comme en* 5.0, *tel que*

$$(\varphi F)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0 ,$$

la fonction $L(T) = L(g,\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi;T)$ *est de la forme*

$$L(T) = P(T)^{(-1)^{m+1}}$$

où

$$P(T) = \prod_{\lambda=1}^{d} (1-\alpha_\lambda T)$$

est un polynôme, avec $P(0) = 1$, *vérifiant :*

(i) *les* $(\alpha_\lambda)_{\lambda=1,\ldots,d}$ *sont des entiers algébriques tels que*

$$|\alpha_\lambda| = q^{m/2}$$

pour tout $\lambda = 1,\ldots,d$ *et pour toute valeur absolue archimédienne* $||$ *sur* $\bar{\mathbb{Q}}$,

(ii) *le degré* d *de* P(T) *est indépendant des choix de* g *et de* $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ *et est donné par la formule topologique*

$$d = (-1)^m[\chi(X_{\mathbb{C}})-\chi(H_{\mathbb{C}})]$$

où $H_{\mathbb{C}}$ *est l'hypersurface de* $X_{\mathbb{C}}$ *d'équation*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\, f_{i,\mathbb{C}}(x) = b$$

pour n'importe quels $a_1,\ldots,a_r,b$ *dans* $\mathbb{C}$ *qui sont algébriquement indépendants sur* R .

De plus, la fonction $\bar{L}(T) = L(g,\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\bar{\psi},\bar{\chi};T)$ *pour* $\bar{\psi} = \psi^{-1}$ *et* $\bar{\chi} = \chi^{-1}$ *s'écrit*

$$\bar{L}(T) = \Big[\prod_{\lambda=1}^{d} (1-q^m\alpha_\lambda^{-1}T)\Big]^{(-1)^{m+1}} .$$

COROLLAIRE 5.2.1. *Pour toute fonction inversible* g *sur* X , *pour tout quintuple* $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$, *comme en* 5.0, *tel que*

$$(\varphi F)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0 ,$$

pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute valeur absolue archimédienne $||$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on a la majoration

$$|S_n(g,\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)| \leqslant (-1)^m[\chi(X_{\mathbb{C}})-\chi(H_{\mathbb{C}})]q^{mn/2} ,$$

avec $H_{\mathbb{C}}$ comme en 5.2.

5.3. Nous allons déduire 5.2 d'un énoncé cohomologique.

Etant donné $g \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)^\times$ et un quintuple $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ comme en 5.0, choisissons un nombre premier ℓ inversible dans $\mathbb{F}_q$ et un plongement $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$; l'homomorphisme $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{F}_q$ se prolonge en un homomorphisme, noté encore φ de $R[1/\ell(q-1)]$ dans $\mathbb{F}_q$.

Le revêtement $\pi_\varphi : \widetilde{X}_\varphi \longrightarrow X_\varphi$ déduit par image réciproque par g_φ du torseur de Lang de $G_{m,\mathbb{F}_q}$,

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_\varphi = X_\varphi\left[\sqrt[q-1]{g_\varphi}\right] & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q} \\ \pi_\varphi \downarrow & \square & \downarrow z \mapsto z^{q-1} \\ X_\varphi & \xrightarrow{\quad g_\varphi \quad} & \mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q} \end{array}$$

est fini étale et encore un $\mathbb{F}_q^\times$-torseur ; on note $\mathcal{L}_\chi(g_\varphi)$ le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur X_φ image réciproque par g_φ du $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\mathcal{L}_\chi$ lisse de rang 1 sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q}$ déduit du $\mathbb{F}_q^\times$-torseur de Lang par extension du groupe structural via

$$\mathbb{F}_q^\times \xrightarrow{\bar{\chi}} \bar{\mathbb{Q}}^\times \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

(cf. [SGA 4½], [Sommes trig.] 1.7). Alors on a une décomposition

$$\pi_{\varphi *}\bar{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_\chi \mathcal{L}_\chi(g_\varphi) ,$$

la somme étant étendue aux $q-1$ caractères χ de $\mathbb{F}_q^\times$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}^\times$.

De même, on note $\mathcal{L}_\psi(\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi})$ le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur X_φ image réciproque par

$$\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi} : X_\varphi \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$$

du $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau d'Artin-Schreier $\mathcal{L}_\psi$ sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ (cf. 2.0).

Les faisceaux $\mathcal{L}_\chi(g_\varphi)$ et $\mathcal{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi})$ sont ponctuellement purs de poids 0 et lisses sur un schéma affine et lisse X_φ sur $\mathbb{F}_q$, purement de dimension m. Compte-tenu de l'interprétation cohomologique des sommes exponentielles (cf. [11] 3 ou [SGA 4½], [Sommes trig.] 1.9) et des résultats de Deligne (cf. [8] 3.3.1), le théorème 5.2 résulte aussitôt du théorème suivant :

THÉORÈME 5.4. *Soient* R, X *et* $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R$ *comme en* 5.0. *Alors il existe un polynôme non nul* $F(y_1,\dots,y_r) \in R[y_1,\dots,y_r]$ *tel que, pour toute fonction inversible* g *sur* X, *pour tout quintuple* $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ *vérifiant*

$$(\varphi F)(a_1,\dots,a_r) \neq 0$$

et pour tout nombre premier ℓ *inversible dans* $\mathbb{F}_q$, *on ait* :

(i) *les groupes de cohomologie* ℓ*-adique*

$$H_c^j = H_c^j(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_\chi(g_\varphi))$$

sont nuls pour tout $j \neq m$, *et l'accouplement défini par le cup-produit et la trace*

$$H_c^m \otimes \bar{H}_c^m \longrightarrow H_c^{2m}(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \bar{\mathbb{Q}}_\ell(-m)$$

où $\bar{H}_c^m$ *est défini comme* H_c^m *mais avec* $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$ *à la place de* ψ, χ, *est une dualité parfaite,*

(ii) *si on pose*

$$H^j = H^j(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_\chi(g_\varphi))$$

la flèche d'oubli des supports

$$H_c^j \longrightarrow H^j$$

est un isomorphisme, pour tout j

(iii) *pour tout* j, $H_c^j \xrightarrow{\sim} H^j$ *est pur de poids* j *et même nul si* $j \neq m$

(iv) *la formule*

$$\chi_c(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_\chi(g_\varphi))$$

$$= \chi_c(X_{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) - \chi_c(H_{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \ .$$

Remarque 5.4.1. Les assertions (i) et (ii) de l'énoncé ci-dessus sont équivalentes et (iii) en résulte (cf. [SGA 4½], [Sommes trig.] 1.20).

5.4.2. Prouvons 5.4. Construisons d'abord un candidat pour $F(y_1,\dots,y_r)$. Pour cela, appliquons d'abord 3.1.2 au morphisme fini $X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R$ et à la stratification triviale $\mathcal{X} = \{X\}$ de X, ceci nous fournit un entier $N \geqslant 1$ et une stratification $\mathcal{E}$ de $\mathbb{A}^r_R[1/N]$; puis appliquons le corollaire 4.2 à $S = \mathrm{Spec}(R[1/N])$, $E = \mathbb{A}^r_S$, $\mathcal{E}$, ceci nous fournit un ouvert dense $U^\vee$ de $E^\vee = \mathbb{A}^r_S$ et donc un ouvert dense $U^\vee$ de $\mathbb{A}^r_R = \mathrm{Spec}(R[y_1,\dots,y_r])$; on prend pour $F(y_1,\dots,y_r)$ un polynôme non nul qui s'annule sur $\mathrm{Spec}(R[y_1,\dots,y_r]) - U^\vee$, de sorte que

$$\mathrm{Spec}(R[y_1,\dots,y_r][1/F]) \subset U^\vee \ .$$

Pour voir que F fait marcher 5.4, on considère pour chaque fonction g inversible et chaque corps fini le revêtement

$$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X[1/q-1]$$

déduit par image réciproque par g du μ_{q-1}-torseur de Kummer de $\mathbb{G}_{m,R[1/q-1]}$,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,R[1/q-1]} \\ \pi \downarrow & \square & \downarrow z \mapsto z^{q-1} \\ X[1/q-1] & \xrightarrow{g} & \mathbb{G}_{m,R[1/q-1]} \end{array}$$

c'est un revêtement fini étale de degré $q-1$, de sorte que, pour tout nombre premier ℓ inversible dans $\mathbb{F}_q$, le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ sur $X[1/\ell(q-1)]$ est lisse de rang $q-1$, ponctuellement pur de poids 0.

Parce que $X[1/\ell(q-1)]$ est lisse sur $R[1/\ell(q-1)]$, purement de dimension relative m, l'objet

$$K_1 = \pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[m]$$

de $D_c^b(X[1/\ell(q-1)],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, qui est adapté à la stratification triviale $\mathcal{X}=\{X\}$ de X, est pervers et pur, de poids m, relativement à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)])$ (cf. 1.2.2 (iii) et 1.3.2 (iii)) ; parce que $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R$ est fini, l'objet

$$K = (f_*\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[m])|\mathbb{A}^r_R[1/\ell(q-1)N]$$

de $D_c^b(\mathbb{A}^r_R[1/\ell(q-1)N],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est encore pervers et pur, de poids m, relativement à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)N])$; de plus, par choix de N, K est adapté à la stratification $\mathcal{S}[1/\ell(q-1)]$ de $E[1/\ell(q-1)]$.

L'hypothèse

$$(\varphi F)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0$$

nous permet de prolonger φ à $R[1/\ell(q-1)N]$ de sorte que l'on dispose de l'objet K_φ sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ déduit de K par le changement de base

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)N]) ;$$

on a

$$K_\varphi = (f_{\varphi *}\pi_{\varphi *}\bar{\mathbb{Q}}_\ell)[m] ,$$

où π_φ coïncide avec le revêtement du même nom considéré en 5.3 (identification du torseur de Lang et du μ_{q-1}-torseur de Kummer de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q}$) ; par suite K_φ se décompose en

$$K_\varphi = \bigoplus_\chi f_{\varphi *}\mathcal{L}_\chi(g_\varphi)[m]$$

où χ parcourt les $q-1$ caractères $\mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$.

Il ne reste plus qu'à appliquer 4.2 à $S' = \mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)N])$, $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, $T \longrightarrow S' \otimes \mathbb{F}_q$ induit par φ, ψ, K et

$$L = f_{\varphi *}\mathcal{L}_\chi(g_\varphi)[m]$$

qui est facteur direct de $K_T = K_\varphi$ dans $D_c^b(E_T,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. L'hypothèse

$$(\varphi F)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0$$

assure que le point $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_r)$ se trouve dans $U_\varphi^\vee$ et, par application en ce point de $U_\varphi^\vee$ des énoncés 4.2 (i), (ii), (iii) et de la remarque 4.2.1, on obtient (à un décalage près) les assertions 5.4 (i), (iii) et (iv).

5.5. La situation en égale caractéristique $p > 0$. Que deviennent 5.2 et 5.4 si l'on permet à l'anneau R d'être un anneau intègre de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$?

THÉORÈME 5.5.1. *Soient R un anneau intègre, de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, X un R-schéma affine et lisse, purement de dimension relative m , $r \geqslant 1$ un entier,*

$$f = (f_1,\ldots,f_r) : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R$$

un R-morphisme fini,

$$g : X \longrightarrow \mathbb{G}_{m,R}$$

une fonction inversible sur X , $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ un caractère additif non trivial, $\chi : \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ un caractère multiplicatif (éventuellement trivial), ℓ un nombre premier inversible dans $\mathbb{F}_q$ et $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ un plongement fixé. Alors, il existe un polynôme non nul $F(y_1,\ldots,y_r) \in R[y_1,\ldots,y_r]$ et un entier $d \geqslant 0$ tels que, pour tout triple $(\mathbb{F}_{q^\nu},\varphi,\underline{a})$, composé d'une extension finie $\mathbb{F}_{q^\nu}$ de $\mathbb{F}_q$, d'un $\mathbb{F}_q$-homomorphisme $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{F}_{q^\nu}$ avec $\varphi(1) = 1$ et d'un élément $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_r) \in (\mathbb{F}_{q^\nu})^r$, vérifiant

$$(\varphi F)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0 ,$$

on ait :

(i) la fonction L associée aux sommes exponentielles

$$S_n = \sum_{x \in X_\varphi(\mathbb{F}_{q^{\nu n}})} \psi_{\nu n}\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}(x)\Big)\chi_{\nu n}(g_\varphi(x))$$

$(n \geqslant 1)$ est de la forme

$$L(T) = \Big[\prod_{\lambda=1}^{d} (1-\alpha_\lambda T)\Big]^{(-1)^{m+1}}$$

où les α_λ $(\lambda = 1,\ldots,d)$ sont des entiers algébriques dont toutes les valeurs absolues archimédiennes satisfont

$$|\alpha_\lambda| = q^{\nu m/2} ,$$

(ii) en cohomologie ℓ-adique, pour tout entier j , l'application d'oubli des supports

$$H_c^j(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_{q^\nu}} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi))$$

$$\longrightarrow H^j(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_{q^\nu}} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi))$$

<u>est un isomorphisme</u> (<u>de sorte que</u> $H_c^j \xrightarrow{\sim} H^j$ <u>est pur de poids</u> j , <u>pour tout</u> j , <u>et nul pour</u> $j \neq m$) <u>et on a la formule</u>

$$\chi_c(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_{q^\nu}} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi)) = (-1)^m d \ .$$

En effet, cet énoncé résulte immédiatement de 2.3.1 appliqué à $\mathcal{F}_\psi(f_* \mathcal{L}_\chi(g)[m])$ et de 2.1.5 (i) (commutation de Fourier aux changements de base).

<u>Remarque</u> 5.5.2. Une grande différence entre 5.5.1 d'une part et 5.2, 5.4 d'autre part, est qu'en 5.5.1, le polynôme F et le degré d dépendent à priori des choix de g, ψ, χ, ℓ ; l'interprétation de d comme degré de la fonction L montre cependant que d ne dépend pas de ℓ et son interprétation comme caractéristique d'Euler-Poincaré de X_φ à coefficients dans $\mathcal{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi)$ montre de plus que d ne dépend pas de g et χ (cf. [11] 5.5.2, cor. 2) ; d ne peut donc dépendre que du choix de ψ (pour R , X et f fixés bien entendu). Est-ce que d dépend vraiment de ψ ? On n'en sait rien. Est-ce que, pour un ψ donné, on peut choisir un polynôme F_ψ qui "marche" pour tous les g , χ , ℓ ? Existe-t-il un seul ψ pour lequel un tel F_ψ existe ?

5.6. <u>Remarques à propos des applications concrètes de</u> 5.2 <u>et</u> 5.2.1.

5.6.1. Pour $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_R^r$ donné comme en 5.0, les démonstrations 4.3 et 5.4.2 fournissent une condition suffisante, que l'on peut expliciter, de pureté géométrique des sommes trigonométriques $S_n(\mathbb{F}_q, \varphi, \underline{a}, \psi, \chi)$, à savoir $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$.

Par exemple, pour les sommes trigonométriques étudiées en [11] 5.1.1, on vérifie aisément que la condition $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$ s'exprime, avec les notations de loc. cit., de la manière suivante : le pinceau d'hypersurfaces de degré d de $\mathbb{P}$, engendré par H et L^d , induit sur $X \hookrightarrow \mathbb{P}$ un pinceau de Lefschetz. On peut constater d'autre part sur cet exemple que la condition $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$ est en général plus restrictive que les critères de pureté que l'on

peut dégager par une analyse précise des sommes trigonométriques considérées (toujours dans loc. cit., le critère de pureté est simplement : H est transverse à $X \cap L$, autrement dit l'axe du pinceau engendré par H et L^d est transverse à X, ce qui n'est qu'une seule des conditions exigées pour que le pinceau induit sur X soit de Lefschetz).

5.6.2. L'hypothèse que X est <u>fini</u> sur $\mathbb{A}^r_R$ est moins innocente qu'on peut le penser. Bien sûr, si l'on part d'un sous-schéma fermé $X \subset \mathbb{A}^r_R$, qui est lisse sur R, il y a beaucoup de façons de trouver des morphismes finis

$$f = (f_1, \ldots, f_r) : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R ;$$

la façon la plus simple est de restreindre à X des polynômes $f_1, \ldots, f_r$ qui définissent un endomorphisme fini de $\mathbb{A}^r_R$; par exemple, ceci est automatique si l'on a

$$\begin{cases} f_1 \in R[x_1], \ f_1 \text{ unitaire de degré } d_1 \geqslant 1 \\ \vdots \\ f_i \in R[x_1, \ldots, x_{i-1}][x_i], \ f_i \text{ unitaire en } x_i \text{ de degré } d_i \geqslant 1 \\ \vdots \end{cases}$$

Par contre, si l'on part du sous-schéma ouvert

$$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]) = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x]) ,$$

alors "on n'a pas le droit" de considérer X muni de la fonction $f = x$ et nos résultats 5.2, 5.4, ne disent donc rien sur les sommes de Gauss

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} \psi(x)\chi(x) .$$

Nous allons combler en partie cette lacune dans le prochain chapitre.

5.6.3. Considérons $X = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$, muni du morphisme $f : \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ défini par un "vrai" polynôme de Laurent,

$$f(x) = \sum_{i=-d_1}^{d_2} a_i x^i$$

avec $d_1, d_2 \geqslant 1$ et $a_{d_2} = a_{-d_1} = 1$; alors f est un morphisme fini et nos résultats disent donc quelque chose sur les sommes correspondantes,

$$S_n = \sum_{x \in \mathbb{F}_{p^n}^{\times}} \psi_n(f(x))\chi_n(x) \qquad (n \geq 1) ,$$

à savoir que la fonction L associée est, pour $p \gg 0$, un polynôme de degré d_1+d_2 , pur de poids 1.

Mais, une analyse détaillée de ces sommes montre qu'en <u>toute</u> caractéristique p première à d_1d_2 , c'est en fait le cas : $L(T)$ est un polynôme de degré d_1+d_2 , pur de poids 1.

Cet exemple illustre la limitation fondamentale de nos résultats : ce sont des résultats génériques en p , i.e. pour $p \gg 0$. Bien sûr, nos résultats sont aussi génériques en $(a_1,\ldots,a_r)$, mais alors que nos méthodes permettent de contrôler la restriction à $\mathbb{A}^r_{R\otimes\mathbb{Q}}$ de l'ouvert $\{F(y_1,\ldots,y_r) \neq 0\}$, elles ne permettent en rien de contrôler la restriction de ce même ouvert à $\mathbb{A}^r_{R\otimes\mathbb{F}_p}$ pour un nombre premier p <u>donné</u>.

6. Sommes trigonométriques que l'on peut rendre pures par adjonction d'un caractère multiplicatif auxiliaire d'ordre assez grand.

6.0. Nous avons étudié au numéro 5 des sommes trigonométriques où interviennent des caractères multiplicatifs, mais dont la pureté n'est en rien liée à la présence de ceux-ci. Dans ce numéro, nous allons au contraire étudier des sommes trigonométriques qui, à priori, ne sont pas (géométriquement) pures mais qui le deviennent après adjonction d'un caractère multiplicatif supplémentaire d'ordre assez grand ; l'exemple type est celui des sommes de Gauss : les sommes

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_{q^n}^\times} \psi_n(x) = -1 ,$$

où $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ est un caractère additif non trivial, ne sont pas (géométriquement) pures, mais, si $\chi : \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ est un caractère multiplicatif non trivial (i.e. d'ordre $\geqslant 1$), les sommes

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_{q^n}^\times} \psi_n(x)\chi_n(x) ,$$

elles, sont (géométriquement) pures.

6.1. Soient $R \subset \mathbb{C}$ une sous-algèbre de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Z}$, r un entier $\geqslant 1$, $\mathbb{A}_R^r$ l'espace affine standard de coordonnées $x_1,\ldots,x_r$, X un R-schéma affine, lisse, purement de dimension relative m, et

$$(f;g) = (f_1,\ldots,f_r;g) : X \longrightarrow \mathbb{A}_R^r \times_R \mathbb{G}_{m,R}$$

un morphisme fini (par exemple, $r=1$, $X = \mathbb{G}_{m,R}$ de coordonnée t, $f=g=t$). Fixons d'autre part une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$.

A tout quintuple $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ composé d'un corps fini $\mathbb{F}_q$, d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{F}_q$ avec $\varphi(1)=1$, d'un élément $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_r)$ de $(\mathbb{F}_q)^r$, d'un caractère additif non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ et d'un caractère multiplicatif $\chi : \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$, nous attachons la famille des sommes trigonométriques $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$S_n = S_n(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi) = \sum_{x\in X_\varphi(\mathbb{F}_{q^n})} \psi_n(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}(x))\chi_n(g(x))$$

et la fonction L correspondante

$$L(T) = L(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi;T) = \exp(\sum_{n\geqslant 1} \frac{T^n}{n} S_n) .$$

THÉORÈME 6.2. Soient $R,X,(f;g) : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R \times_R \mathbb{G}_{m,R}$ comme en 6.1. Alors il existe un polynôme non nul $F(y_1,\ldots,y_r) \in R[y_1,\ldots,y_r]$ et un ensemble finis $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^*$ d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante : pour tout quintuple $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$, comme en 6.1, tel que

$$\begin{cases} (\varphi F)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0 \\ \\ \quad \mathrm{ord}(\chi) \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

où $\mathrm{ord}(\chi)$ est l'ordre exact du caractère χ , on a :

(I) la fonction $L(T) = L(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi;T)$ est de la forme

$$L(T) = P(T)^{(-1)^{m+1}} ,$$

où

$$P(T) = \prod_{\lambda=1}^{d} (1-\alpha_\lambda T)$$

est un polynôme, avec $P(0) = 1$, qui vérifie :

(i) les α_λ sont des entiers algébriques tels que

$$|\alpha_\lambda| = q^{m/2}$$

pour tout $\lambda = 1,\ldots,d$ et toute valeur absolue archimédienne $||$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$

(ii) le degré d de $P(T)$ est donné par la formule topologique

$$d = (-1)^m[\chi(X_{\mathbb{C}})-\chi(H_{\mathbb{C}})]$$

où $X_{\mathbb{C}}$ est la variété complexe $X\otimes_R \mathbb{C}$ et où $H_{\mathbb{C}}$ est l'hypersurface de $X_{\mathbb{C}}$ d'équation

$$\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\mathbb{C}}(x) = b$$

pour n'importe quels $a_1,\ldots,a_r,b$ dans $\mathbb{C}$ qui sont algébriquement indépendants sur R ,

(iii) la fonction $\bar{L}(T)$ associée à $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\bar{\psi},\bar{\chi})$ pour $\bar{\psi}=\psi^{-1}$, $\bar{\chi}=\chi^{-1}$, s'écrit

$$\bar{L}(T) = \Big[\prod_{\lambda=1}^{r} (1-q^m\alpha_\lambda^{-1}T)\Big]^{(-1)^{m+1}} ;$$

(II) pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute valeur absolue archimédienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on a la majoration

$$|S_n(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)| \leqslant (-1)^m[\chi(X_{\mathbb{C}})-\chi(H_{\mathbb{C}})]q^{nm/2} .$$

Les mêmes arguments qu'en 5.3 montrent que le théorème 6.2 résulte de l'énoncé cohomologique suivant :

THÉORÈME 6.3. Soient $R,X,(f;g) : X \longrightarrow \mathbb{A}^r_R \times_R \mathbb{G}_{m,R}$ comme en 6.1. Alors, il existe un polynôme non nul $F(y_1,\ldots,y_r) \in R[y_1,\ldots,y_r]$ et un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^*$ d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante : pour tout quintuple $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$, comme en 6.1, tel que

$$\begin{cases} (\varphi F)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0 \\ \qquad \mathrm{ord}(\chi) \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

et pour tout nombre premier ℓ inversible dans $\mathbb{F}_q$, on a les assertions (i), (ii), (iii) et (iv) de 5.4.

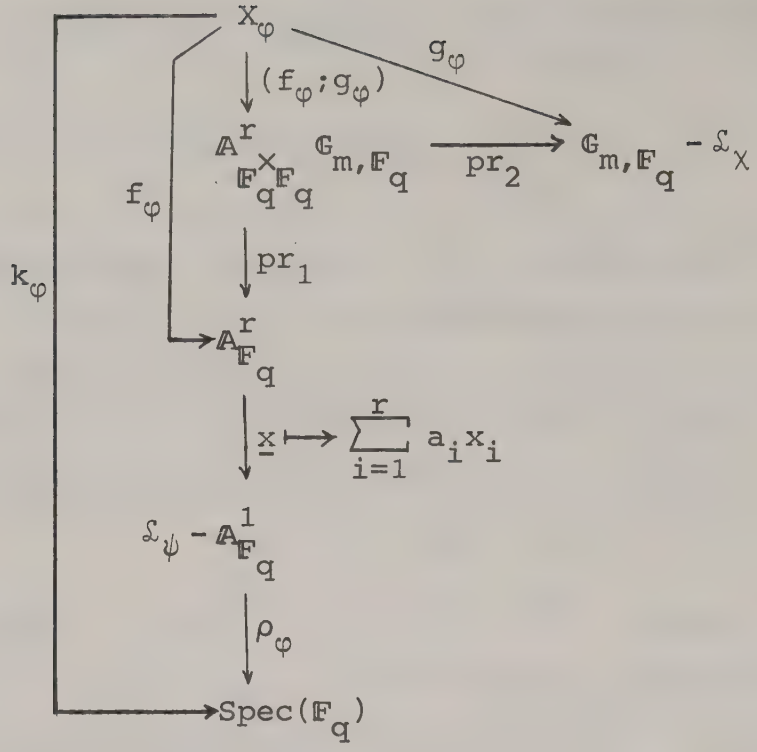
6.4. Les idées de la démonstration de 6.3. Fixons d'abord un quintuple $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ et un nombre premier ℓ inversible dans $\mathbb{F}_q$. Comment calculer les

$$H_c^j = H_c^j(X_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_\chi(g_\varphi))$$

(les notations étant celles de 5.3) ?

On considère le diagramme

(6.4.1)



où $k : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ et $\rho : \mathbb{A}^1_R \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ sont les morphismes structuraux et où $\mathcal{L}_\psi$ et $\mathcal{L}_\chi$ sont les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de rang 1 définis en 2.0 et 5.3 respectivement.

Alors, la formule de projection et la définition de la transformation $\mathcal{F}_\psi$ (dans sa version $\mathcal{F}_{!,\psi}$, cf. (2.1.1)) montrent que

$$Rk_{\varphi!}(\mathcal{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathcal{L}_\chi(g_\varphi))[m+r]$$

est la fibre au point $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{A}^r_{\mathbb{F}_q}$ de

(6.4.2) $$\mathcal{F}_\psi(Rpr_{1!}(K_{\ell,\varphi} \otimes pr_2^* \mathcal{L}_\chi))$$

avec

$$K_{\ell,\varphi} = (f_\varphi ; g_\varphi)_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell[m] .$$

Le point important est alors que, mis à part le $\mathcal{L}_\psi$ qui intervient dans $\mathcal{F}_\psi$, tous les autres données dans (6.4.2) "proviennent de la caractéristique nulle". Précisons ceci. Pour tout entier $\nu \geqslant 1$, considérons le revêtement de Kummer de degré ν de $G_{m,\mathbb{Z}[1/\nu]}$, i.e. le $\mu_{\nu,\mathbb{Z}[1/\nu]}$-torseur

$$\begin{array}{c} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}[1/\nu]} \\ \Big\downarrow [\nu] : z \longmapsto z^\nu \\ \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}[1/\nu]} \end{array}$$

c'est un revêtement fini étale de degré ν qui, par le changement de base

$$\mathbb{Z}[1/\nu] \longrightarrow \mathbb{Z}[1/\nu,\zeta_\nu] = \mathbb{Z}[1/\nu,T]/\Phi_\nu(T)$$

où $\Phi_\nu(T)$ est le ν-ième polynôme cyclotomique, devient un revêtement fini étale galoisien, de groupe de Galois

$$G_\nu = \mu_\nu(\mathbb{Z}[1/\nu,\zeta_\nu]) ,$$

cyclique d'ordre ν. Pour tout nombre premier ℓ, on a donc, sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}[1/\nu\ell,\zeta_\nu]}$, une décomposition

$$[\nu]_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_\chi \mathcal{K}_\chi$$

étendue aux ν caractères $\chi : G_\nu \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, où chaque $\mathcal{K}_\chi$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 (cf. [SGA 4½], [Sommes trig.], 4.7). Mais, on voit immédiatement que, pour chaque diviseur ν_1 de ν, la somme

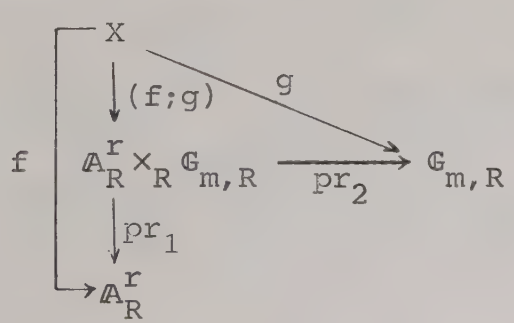
$$\bigoplus_{\substack{\chi \\ \mathrm{ord}(\chi)=\nu_1}} \mathcal{K}_\chi \overset{\mathrm{dfn}}{=\!=} \mathcal{K}_{[\nu_1,\nu]}$$

se descend canoniquement en un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang $\varphi(\nu_1)$ (φ = indicateur d'Euler) sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}[1/\nu]}$, $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau encore noté $\mathcal{K}_{[\nu_1,\nu]}$, et on voit que, pour ν_1 fixe et ν un multiple variable de ν_1, on a l'identification canonique

$$\mathcal{K}_{[\nu_1,\nu]} = \mathcal{K}_{[\nu_1,\nu_1]}\,|\,\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}[1/\nu]} .$$

Nous noterons simplement $\mathcal{K}_{[\nu_1]}$ le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 $\mathcal{K}_{[\nu_1,\nu_1]}$ sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}[1/\nu_1]}$.

Reprenons alors la moitié supérieure de notre diagramme (6.4.1), mais cette fois-ci au-dessus de R :



et posons, pour tout nombre premier ℓ ,

$$K_\ell = (f;g)_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[m]$$

c'est un objet de $D_c^b((\mathbb{A}_R^r \times_R \mathbb{G}_{m,R})[1/\ell],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est pervers et pur, de poids m , relativement à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell])$ (cf. 1.2.2 (v) et 1.3.2 (v) : X est lisse sur R purement de dimension relative m et $(f;g)$ est fini) ; de plus, à torsion à la Tate près, il est autodual (pour la dualité relative à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell])$).

Par (3.1.2) appliqué à $(f;g) : X \longrightarrow \mathbb{A}_R^r \times_R \mathbb{G}_{m,R}$ et à la stratification triviale $\mathcal{X} = \{X\}$ de X , il existe un entier N_1 et une stratification $\mathcal{A}$ de $(\mathbb{A}_R^r \times_R \mathbb{G}_{m,R})[1/N_1]$ à laquelle K_ℓ est adapté pour tout ℓ .

Par (3.3.3) appliqué à $\mathrm{pr}_1 : (\mathbb{A}_R^r \times_R \mathbb{G}_{m,R})[1/N_1] \longrightarrow \mathbb{A}_R^r[1/N_1]$ et à la stratification $\mathcal{A}$, il existe un élément $b \in R-\{0\}$ et une stratification $\mathcal{B}$ de $\mathbb{A}_R^r[1/N_1.b]$ tels que

(1) $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathrm{pr}_{1!})$ soit une !-stratification universelle de pr_1 ,

(2) $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ soit une *-stratification de pr_1 .

Grâce à l'énoncé 4.2 d'uniformité de la transformation de Fourier, notre théorème 6.3 est maintenant conséquence immédiate de l'énoncé suivant :

6.4.3. Il existe un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $\nu \notin \mathcal{S}$ et pour tout nombre premier ℓ , l'objet

$$R\mathrm{pr}_{1!}(K_\ell \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{H}_{[\nu]})$$

de $D_c^b(\mathbb{A}_R^r[1/N_1 b \ell \nu],\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est pervers et pur, de poids m , relativement à $\mathrm{Spec}(R[1/N_1 b \ell \nu])$.

Remarque. Bien entendu, on utilise le fait que pour $(\mathbb{F}_q,\varphi,\underline{a},\psi,\chi)$ et ℓ fixé, $R\mathrm{pr}_{1!}(K_{\ell,\varphi} \otimes \mathrm{pr}^* \mathcal{L}_\chi)$ est un facteur direct de $(R\mathrm{pr}_{1!}(K_\ell \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{H}_{[\nu]}))_\varphi$, pour $\nu = \mathrm{ord}(\chi)$: cela résulte du théorème de changement de base propre (cf. [SGA 4] XII, 5.1) et de l'identification du torseur de Lang de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q}$ avec le torseur de Kummer de degré $q-1$ de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q}$ (cf. [SGA 4½], [Sommes trig.], 4.9).

Pour prouver 6.4.3, nous allons appliquer les critères (1.2.2) (v) et (1.3.2)(v) : l'objet $K_\ell \otimes pr_2^* \mathcal{K}_{[\nu]}$ étant pervers et pur, de poids m, relativement à $R[1/N_1 b\ell\nu]$, et autodual (à torsion à la Tate près), son $Rpr_{1!}$ est pervers et pur, de poids m, relativement à $R[1/N_1 b\ell\nu]$ si, après tout changement de base

$$T \longrightarrow \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu]) ,$$

avec T bon, la flèche d'oubli des supports

$$(*) \qquad Rpr_{1!}(K_{\ell,T} \otimes pr_2^* \mathcal{K}_{[\nu],T}) \longrightarrow Rpr_{2*}(K_{\ell,T} \otimes pr_2^* \mathcal{K}_{[\nu],T})$$

est un isomorphisme.

Comme $(\mathcal{A},\mathcal{S})$ est une $*$-stratification de pr_1, la formation de $Rpr_{1*}(K_\ell \otimes pr_2^* \mathcal{K}_{[\nu]})$ est compatible aux changements de base $T \longrightarrow \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$ ci-dessus ; d'autre part, il en est de même de la formation de $Rpr_{1!}(K_\ell \otimes pr_2^* \mathcal{K}_{[\nu]})$ d'après [SGA 4] XII 5.1 ; par suite, pour montrer que $(*)$ est un isomorphisme pour tout T, il suffit de montrer que $(*)$ est un isomorphisme pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$.

Comme $(\mathcal{A},\mathcal{S})$ est aussi une $!$-stratification de pr_1, la source et le but de $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$ sont tous deux adaptés à la stratification $\mathcal{S}$; donc, pour vérifier que $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$ est un isomorphisme, il suffit de le faire en chaque point maximal de chaque strate de $\mathcal{S}$; mais quitte à rétrécir $R[1/N_1 b\ell\nu]$, i.e. à "agrandir" b, on peut supposer que chaque point maximal de chaque strate de $\mathcal{S}$ s'envoie sur le point générique de $\mathrm{Spec}(R)$; par suite, pour vérifier que $(*)$ est un isomorphisme pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$, il suffit de vérifier que $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, $R[1/N_1 b\ell\nu] \hookrightarrow \mathbb{C}$, est un isomorphisme.

Enfin, la comparaison avec la cohomologie transcendante et le fait que nos données de départ (le faisceau constant $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et les $\mathcal{K}_{[\nu]}$ sur $X \otimes_R \mathbb{C}$ et $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ respectivement) se déduisent par $(-) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ à partir de systèmes locaux de $\bar{\mathbb{Q}}$-vectoriels sur $(X \otimes_R \mathbb{C})^{an}$ et sur $(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^{an}$, montrent que, pour un ν donné, le morphisme $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ est soit un isomorphisme pour tout ℓ soit pour aucun ℓ.

La discussion ci-dessus montre clairement que 6.4.3 (et par suite notre théorème 6.3) est conséquence de l'énoncé suivant :

THÉORÈME 6.5. Soient Y un $\mathbb{C}$-schéma de type fini, ℓ un nombre premier et $\mathcal{F}$ un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur $Y \times_{\mathbb{C}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Notons

$$\begin{array}{ccc} Y \times_{\mathbb{C}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} & & \\ Y & & \end{array}$$

les projections et, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{K}_{[\nu]}$ le facteur direct du $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse $[\nu]_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ défini en 6.4. Alors, il existe un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $\nu \notin \mathcal{S}$, la flèche d'oubli des supports

$$Rpr_{1!}(\mathcal{F} \otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}) \longrightarrow Rpr_{1*}(\mathcal{F} \otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]})$$

soit un isomorphisme.

6.5.1. Preuve de 6.5. On a la compactification suivante de pr_1

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{m,Y} & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{P}^1_Y & \xhookleftarrow{i} & \{0,\infty\} \times Y \\ & {\scriptstyle pr_1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \bar{pr}_1} & & \\ & & Y & & \end{array}$$

et, pour vérifier que la flèche d'oubli des supports de l'énoncé est un isomorphisme, il suffit de vérifier que

$$i^*Rj_*(\mathcal{F} \otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}) = 0$$

dans $D^b_c(\{0,\infty\} \times Y, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ (on a $Rpr_{1!} = R\bar{pr}_{1}j_!$, $Rpr_{1*} = R\bar{pr}_{1*}Rj_*$ et le triangle $j_! \longrightarrow Rj_* \longrightarrow i^*Rj_*$).

Considérons alors la "situation de cycles évanescents"

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{m,Y} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1_Y & \hookleftarrow & \{0,\infty\} \times Y \\ \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow \\ \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \hookleftarrow & \{0,\infty\} \end{array}$$

et, pour $\alpha = 0$, ∞, le complexe des cycles évanescents (cf. [SGA 7] XIII 2.1 et [SGA 4½], [Th. Finitude] 3.2)

$$R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F}\otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}) \in ob\ D_c^b(\{\alpha\}\times Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

muni de l'action du groupe d'inertie $I_\alpha = Gal(\bar{\eta}_\alpha/\eta_\alpha)$ du localisé strict $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})_{(\alpha)}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ en α (η_α est le point générique de ce localisé strict et $\bar{\eta}_\alpha$ un point géométrique au-dessus de η_α).

Si on note $i_\alpha : \{\alpha\}\times Y \hookrightarrow \mathbb{P}^1_Y$ l'inclusion, on a (cf. [SGA 4½], [Th. Finitude], 3.11)

$$i_\alpha^* Rj_*(\mathcal{F}\otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}) = R\Gamma(I_\alpha, R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F}\otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}))\ ;$$

or, d'après [SGA 7] I, 0.3, on a

$$I_\alpha \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mu_n(\bar{\eta}_\alpha) \xleftarrow{\sim} \varprojlim_n \mu_n(\mathbb{C})\ ,$$

de sorte que I_α est (non canoniquement) isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}$; par suite, si on choisit un générateur topologique T_α de I_α, l'isomorphisme ci-dessus dans $D_c^b(\{\alpha\}\times Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ se traduit plus concrètement par le triangle de $D_c^b(\{\alpha\}\times Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ suivant :

$$\begin{array}{ccc} & R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F}\otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}) & \\ {\scriptstyle +1}\swarrow & & \nwarrow{\scriptstyle T_\alpha - 1} \\ i_\alpha^* Rj_*(\mathcal{F}\otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}) & \longrightarrow & R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F}\otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}) \end{array}$$

(c'est la version "catégorie dérivée" du calcul par Serre des $H^i(\hat{\mathbb{Z}},-)$, cf. [16] chap. I, p. 31).

Enfin, on a la formule de projection

$$(R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F}\otimes pr_2^*\mathcal{K}_{[\nu]}),T_\alpha) = (R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F}),T_\alpha)\otimes((\mathcal{K}_{[\nu]})_{\bar{\eta}_\alpha},T_\alpha)\ ,$$

où $(\mathcal{K}_{[\nu]})_{\bar{\eta}_\alpha}$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie $\varphi(\nu)$ sur lequel T_α agit avec, pour valeurs propres, les racines primitives ν-ième de 1 dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

Maintenant, par "constructibilité" de $R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F})$, il existe un polynôme unitaire $P_\alpha(T_\alpha)\in\bar{\mathbb{Q}}_\ell[T_\alpha]$ tel que

$$P_\alpha(T_\alpha)\,|\,R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F}) = 0 \qquad (\alpha = 0,\infty)\ ;$$

soit alors $\mathcal{S}\subset\mathbb{N}^*$ l'ensemble (fini) des entiers $\nu \geqslant 1$ tels que P_0 ou P_∞ admette au moins un zéro qui soit une racine primitive ν-ième de 1 dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$; $\mathcal{S}$ fait marcher 6.5 : en effet, pour un

$\nu \nmid \ell$, T_α , agissant sur une quelconque des fibres d'un des faisceaux de cohomologie de $R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F} \otimes pr_2^* \mathcal{K}_{[\nu]})$, n'admet jamais la valeur propre 1 , donc $T_\alpha - 1$ est un isomorphisme de $R\psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathcal{F} \otimes pr_2^* \mathcal{K}_{[\nu]})$. c.q.f.d.

Remarque 6.5.1. Essentiellement la même démonstration montre le même théorème où l'on a remplacé $\mathbb{C}$ par un corps, disons algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$ (avec bien entendu $\ell \neq p$) et où l'on ne considère que des ν premiers à p .

7. Lien avec la transformation de Fourier pour les $\mathcal{D}$-Modules et application (conjecturale) à la détermination d'un "gros" ouvert de pureté géométrique des sommes trigonométriques.

7.0. Commençons par quelques rappels sur les $\mathcal{D}$-Modules dans le cadre algébrique (cf. [2], [3], [4] et [5] 7).

Soient k un corps de caractéristique 0 et X un k-schéma séparé, de type fini et lisse, purement de dimension relative $n \geqslant 1$. On note

$$\pi : T^*X = \mathbb{V}((\Omega^1_{X/k})^\vee) \longrightarrow X$$

le fibré cotangent à X, muni de sa structure symplectique canonique, et $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i})$ l'Anneau des opérateurs différentiels sur X relativement à k, muni de la filtration par l'ordre des opérateurs ; on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_X$-Algèbres

$$\pi_* \mathcal{O}_{T^*X} = \mathrm{gr}\, \mathcal{D}_X \,. \tag{7.0.1}$$

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module (à gauche) cohérent, la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, notée $|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|$, est le fermé (réduit) de T^*X défini comme suit : on choisit une "bonne filtration" $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ (il en existe toujours dans le cadre algébrique), de sorte que $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ est un $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$-Module cohérent et définit, via (7.0.1), un $\mathcal{O}_{T^*X}$-Module cohérent $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$; $|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|$ est le support de $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$, support qui ne dépend pas du choix de la bonne filtration. $|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|$ est un fermé conique et involutif (O. Gabber).

$\mathcal{M}$ est dit holonome si sa variété caractéristique est de dimension $\leqslant n$; alors, soit $\mathcal{M} = 0$, soit $|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|$ est lagrangienne dans T^*X et donc purement de dimension n.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module (à gauche) holonome et soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une bonne filtration de $\mathcal{M}$, les longueurs de $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$ aux points génériques de $|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|$ ne dépendent pas non plus du choix de la bonne filtration ; si $(\Lambda_i)_{i\in I}$ est la famille des composantes irréductibles de $|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|$ et si m_i est la longueur de $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$ au point générique de Λ_i, le cycle de dimension n de T^*X,

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \sum_{i\in I} m_i [\Lambda_i] \tag{7.0.2}$$

est appelé le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$; c'est un cycle positif. En fait si $Y_i = \pi(\Lambda_i)$, Λ_i coïncide avec $T^*_{Y_i} X$ où, par abus de notation, $T^*_{Y_i} X$ désigne l'adhérence dans T^*X du fibré conormal à la partie lisse sur k de Y_i dans X ; par suite, on a

$$\text{(7.0.3)} \qquad \mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \sum_{i\in I} m_i . [T^*_{Y_i} X] \ .$$

Pour $k = \mathbb{C}$, on a une interprétation topologique de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$ essentiellement due à Kashiwara (cf. [7] II) : notons $(-)^{an}$ le foncteur "passage à l'analytique", alors le complexe de De Rham

$$\text{(7.0.4)} \quad \mathrm{DR}(\mathcal{M}^{an}) = [\mathcal{M}^{an} \longrightarrow \Omega^1_{X^{an}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{an}}} \mathcal{M}^{an} \dashrightarrow \Omega^n_{X^{an}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{an}}} \mathcal{M}^{an}]$$

(où $\Omega^n_{X^{an}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{an}}} \mathcal{M}^{an}$ est placé en degré 0) est un objet pervers de $D^b_c(X^{an}, \mathbb{C})$, adapté à toute stratification $\mathcal{X}^{an} = \{X^{an}_\alpha\}$ de Whitney de X^{an} pour laquelle les Y^{an}_i de (7.0.3) sont réunion de strates X^{an}_α et dont la fonction χ est donnée par

$$\text{(7.0.5)} \quad \chi(\mathrm{DR}(\mathcal{M}^{an}))(x) = \sum_{i\in I} (-1)^{\dim Y_i} \mathrm{Eu}_{Y_i}(x).m_i$$

($\mathrm{Eu}_{Y_i}(x)$ désigne l'obstruction d'Euler de Y_i en x ; si Y_i est lisse sur k en x, $\mathrm{Eu}_{Y_i}(x) = 1$; cf. [7] I).

<u>Exemple</u> 7.0.6. Soit $X = \mathbb{A}^r_k = \mathrm{Spec}(k[x_1,\ldots,x_r])$, alors

$$\Gamma(X,\mathcal{D}_X) = k\langle x_1,\ldots,x_r,\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_r\rangle$$

(algèbre de polynômes non commutative) ; si J est un idéal à gauche de $\Gamma(X,\mathcal{D}_X)$,

$$M = \Gamma(X,\mathcal{D}_X)/J$$

est un $\Gamma(X,\mathcal{D}_X)$-module à gauche que l'on peut filtrer comme suit

$$M_i = \Gamma(X,\mathcal{D}_{X,i})/J \cap \Gamma(X,\mathcal{D}_{X,i})$$

de sorte que $\mathrm{gr}\, J$ est l'annulateur du $\mathrm{gr}\,\Gamma(X,\mathcal{D}_X)$ $(= \Gamma(X,\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X))$-module $\mathrm{gr}\, M$; alors, si $P_1(\underline{x},\underline{\xi}),\ldots,P_s(\underline{x},\underline{\xi})$ sont des générateurs, homogènes en les $\xi_1,\ldots,\xi_r$ (images des $\partial/\partial x_1,\ldots\partial/\partial x_r$ dans $\mathrm{gr}\,\Gamma(X,\mathcal{D}_X)$) de l'idéal gradué $\mathrm{gr}\, J$, la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X$-Module cohérent $\mathcal{M}$, tel que $\Gamma(X,\mathcal{M}) = M$, est définie par l'annu-

lation des polynômes $P_1,\dots,P_s$ dans $T^*X = \mathrm{Spec}(k[x_1,\dots,x_r,\xi_1,\dots,\xi_r])$.

En particulier, soit $f \in k[x_1,\dots,x_r]$ tel que $Y = f^{-1}(0)$ soit une hypersurface lisse sur k de X et soit J l'idéal à gauche de $\Gamma(X,\mathcal{D}_X)$ engendré par

$$f \quad \text{et les} \quad f'_i \frac{\partial}{\partial x_j} - f'_j \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant r)$$

où f'_i est la dérivée partielle de f par rapport à x_i, alors le $\mathcal{D}_X$-Module cohérent $\mathcal{M}$, tel que $\Gamma(X,\mathcal{M}) = \Gamma(X,\mathcal{D}_X)/J$, n'est autre que

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}^1_Y(\mathcal{O}_X) ,$$

$\mathcal{M}$ est holonome, on a

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = [T^*_Y X]$$

et, si $k = \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{DR}(\mathcal{M}^{an}) = \underline{\mathbb{C}}_{Y^{an}}[r] .$$

7.1. La transformation de Fourier pour les $\mathcal{D}$-Modules a été introduite par I.N. Bernstein (cf. [2] 3.3 et [5] 7.16). Soient k un corps de caractéristique zéro, r un entier $\geqslant 1$, $A = \mathrm{Spec}(k[x_1,\dots,x_r])$ l'espace affine type de dimension r sur k et $A^\vee = \mathrm{Spec}(k[y_1,\dots,y_r])$ l'espace affine dual. La <u>transformation de Fourier</u> pour les $\mathcal{D}$-Modules est un foncteur, noté $\mathfrak{F}$, de la catégorie des $\mathcal{D}_A$-Modules (à gauche) quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathcal{D}_{A^\vee}$-Modules (à gauche) quasi-cohérents, défini comme suit : on a un isomorphisme de k-algèbres

$$(7.1.1) \qquad F : \Gamma(A^\vee,\mathcal{D}_{A^\vee}) \longrightarrow \Gamma(A,\mathcal{D}_A)$$

défini par

$$F(y_i) = \partial/\partial x_i \qquad F(\partial/\partial y_i) = -x_i \qquad (i = 1,\dots,r)$$

et, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_A$-Module quasi-cohérent, $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ est le $\mathcal{D}_{A^\vee}$-Module quasi-cohérent tel que

$$\Gamma(A^\vee,\mathfrak{F}(\mathcal{M})) = F^*(\Gamma(A,\mathcal{M}))$$

($\Gamma(A,\mathcal{M})$ "vu" comme $\Gamma(A^\vee,\mathcal{D}_{A^\vee})$ via F).

Exemple 7.1.2 (cf. [5] 8.7). Soit $f \in k[x_1,\dots,x_r]$ définissant dans A une hypersurface, lisse sur k, $X = f^{-1}(0)$, alors (cf. 7.0.6)

$$\Gamma(A^\vee,\mathfrak{F}(\mathcal{H}^1_X(\mathcal{O}_A))) = \Gamma(A^\vee,\mathcal{D}_{A^\vee})/J^\vee$$

où $J^\vee$ est l'idéal à gauche de $\Gamma(A^\vee,\mathcal{D}_{A^\vee})$ engendré par

$$f(\partial/\partial y_1,\dots,\partial/\partial y_r)$$

et les

$$f'_j(\partial/\partial y_1,\dots,\partial/\partial y_r).y_i - f'_i(\partial/\partial y_1,\dots,\partial/\partial y_r).y_j$$

$(1 \leqslant i < j \leqslant r)$.

On trouvera en 7.3.1 une démonstration du lemme "bien connu" suivant :

LEMME 7.1.3. Notons $pr : A \times_k A^\vee \longrightarrow A^\vee$, $pr^\vee : A \times_k A^\vee \longrightarrow A^\vee$ les projections canoniques et $\langle\ ,\ \rangle : A \times_k A^\vee \longrightarrow \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$ la flèche d'évaluation ; soit $\mathcal{L}$ le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1_k}$-Module défini par

$$\Gamma(\mathbb{A}^1_k,\mathcal{L}) = k[t]$$

et

$$(\partial/\partial t).P(t) = P'(t) - P(t)\ .$$

Alors, pour tout $\mathcal{D}_A$-Module quasi-cohérent $\mathcal{M}$, on a

$$\mathfrak{F}(\mathcal{M}) = \int_{pr^\vee} (\overset{\mathbb{L}}{pr}{}^*\mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A \times_k A^\vee}} \overset{\mathbb{L}}{\langle\ ,\ \rangle}{}^*\mathcal{L})$$

dans la catégorie dérivée des $\mathcal{D}_{A^\vee}$-Modules quasi-cohérents.

Remarque 7.1.4. Ce lemme met en évidence une analogie, en fait très profonde, entre la transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ ci-dessus et les transformations de Fourier $\mathfrak{F}_\psi$ définies au numéro 2. Cette analogie est renforcée par le "dictionnaire" suivant entre propriétés de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{L}_\psi$:

$\mathcal{L}$ libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k}$	$\mathcal{L}_\psi$ lisse de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_k$
$\mathcal{L}$ a pour irrégularité 1 à l'infini	$\mathcal{L}_\psi$ a pour conducteur de Swan 1 à l'infini
$\Lambda(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k}$	$\Lambda(\mathcal{L}_\psi) = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$

où $\Lambda(-) = s^*(-) \otimes pr_1^*(-)^{-1} \otimes pr_2^*(-)^{-1}$, avec $pr_i : \mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ $(i = 1,2)$ les deux projections et $s : \mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ le morphisme somme. Il résulte d'ailleurs du dictionnaire ci-dessus que $\mathcal{F}$ et les $\mathcal{F}_\psi$ ont des propriétés formelles tout à fait parallèles.

Les analogies ci-dessus entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_\psi$ et l'interprétation topologique du cycle caractéristique d'un $\mathcal{D}$-Module, nous amènent à formuler la conjecture suivante :

CONJECTURE 7.1.5. Pour tout cycle positif z dans T^*A à support conique et lagrangien (et donc de la forme (7.0.3)), il existe un cycle positif dans $T^*A^\vee$ à support conique et lagrangien (et donc de la forme (7.0.3)), uniquement déterminé par z , ayant la propriété suivante : pour tout $\mathcal{D}_A$-Module holonome $\mathcal{M}$ à singularités régulières (cf. [5] 7.1) admettant pour cycle caractéristique z , on a

$$Car(\mathcal{F}(\mathcal{M})) = z^\vee .$$

Commentaires 7.1.5.1. La notion de singularités régulières pour les $\mathcal{D}$-Modules holonomes "correspond" à la notion de modération pour les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux en caractéristique $p > 0$; cette hypothèse est indispensable pour la validité de notre conjecture : pour $A = Spec(k[x])$, k algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$, tout comme $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{L}_\psi(xy))$ est concentré au point y de $A^\vee$ si $p > 0$, $\mathcal{F}(\mathcal{L}(xy))$ est concentré au point y de $A^\vee$ si $p = 0$, bien que $Car(\mathcal{L}(xy))$ soit $[T^*_A A]$ pour tout y ($\mathcal{L}(xy)$ a pour solution e^{xy}).

7.1.5.2. Notre conjecture est un énoncé de "type Riemann-Roch" ; rappelons que pour $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre schémas séparés, lisses et de type fini sur un corps de caractéristique 0, le théorème de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-Modules (cf. [7] III B)

dit que $\mathrm{Car}(\int_f \mathcal{M})$ ne dépend que de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$ et ce par une formule explicite, pour tout $\mathcal{D}_X$-Module (à gauche) cohérent (ce résultat est à comparer avec 3.1.2).

7.1.5.3. Compte-tenu des remarques précédentes et de l'interprétation topologique de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$, on peut envisager de démontrer 7.1.5 de la même façon que 4.1 ; la principale difficulté vient du fait que pour démontrer l'analogue de 4.3.2, il nous manque le pendant pour l'irrégularité du théorème de semi-continuité du conducteur de Swan (cf. Conjecture 7.3.2.1).

7.2. Il est tout-à-fait raisonnable de regrouper 4.1 et 7.1.5 en un énoncé (conjectural) commun ; nous nous limiterons cependant à formuler les conséquences concrètes d'un tel énoncé pour l'étude des sommes trigonométriques considérées au numéro 5.

Reprenons les notations de 5.0 mais, pour simplifier supposons que $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}[1/M]$ pour un entier $M \geqslant 1$. Notons z le cycle caractéristique du $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^r_{\mathbb{Q}}}$-Module (à gauche) holonome à singularités régulières

$$\int_{f_{\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{X\otimes\mathbb{Q}}$$

et soit $z^\vee$ le cycle caractéristique du $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^r_{\mathbb{Q}}}$-Module (à gauche) holonome

$$\mathfrak{F}\left(\int_{f_{\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{X\otimes\mathbb{Q}}\right) .$$

Il existe alors un plus grand ouvert dense $U^\vee_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{A}^r_{\mathbb{Q}}$ tel que

$$z^\vee \mid T^*U^\vee_{\mathbb{Q}} = d[T^*_{U^\vee_{\mathbb{Q}}} U^\vee_{\mathbb{Q}}] \tag{7.2.1}$$

pour un entier $d \geqslant 0$ ($T^*_{U^\vee_{\mathbb{Q}}} U^\vee_{\mathbb{Q}}$ est la section nulle de $T^*U^\vee_{\mathbb{Q}}$). Soient

$$F_1, \ldots, F_s \in R[y_1, \ldots, y_r]$$

un système d'équation du fermé $\mathbb{A}^r_{\mathbb{Q}} - U^\vee_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{A}^r_{\mathbb{Q}}$.

CONJECTURE 7.2.2. *Il existe un entier* $N \geqslant 1$ *tel que pour tout quintuple* $(\mathbb{F}_q, \varphi, \underline{a}, \psi, \chi)$ *vérifiant*

$$(q,N) = 1 \quad \text{et} \quad (\varphi F_i)(a_1,\ldots,a_r) \neq 0$$

pour au moins un $i \in \{1,\ldots,s\}$, toutes les conclusions de 5.2 sont vérifiées avec pour d l'entier défini par (7.2.1).

Commentaires 7.2.3.1. On trouvera dans [5] 8.7 une démonstration de l'égalité des entiers d définis en 5.2 et (7.2.1) ; une autre démonstration consiste à paraphraser la seconde partie de 4.3.3 en remplaçant la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič par la formule de Deligne (cf. [9] (6.21.1)).

7.2.3.2. Dans le cas où X est une hypersurface lisse de $\mathbb{A}^r_R$ définie par une équation $f \in R[x_1,\ldots,x_r]$, les considérations développées en 7.0.6 et 7.1.2 permettent en principe une détermination explicite de polynômes $F_1,\ldots,F_s$ (rappelons que sous ces hypothèses

$$\int_{f_{\mathbb{Q}}} \mathcal{C}_{X\otimes\mathbb{Q}} = \mathcal{H}^1_{X\otimes\mathbb{Q}}(\mathcal{C}_{\mathbb{A}^r_{\mathbb{Q}}}) \ .$$

7.2.3.3. Le critère de pureté 7.2.2 est meilleur que le critère que l'on peut expliciter à partir des démonstrations 4.3 et 5.4.2 (cf. 5.6.1) et coïncide pour $p \gg 0$ avec les critères de pureté que l'on peut dégager d'analyses géométriques précises (cf. [5] 8.7, [11] et [14]) ; cependant, notre conjecture ne dit rien sur le "$p \gg 0$" ou sur le $N \gg 1$ (mis à part son existence !).

Appendice 7.3.

7.3.1. Preuve de 7.1.3.

Pour simplifier les notations on supposera $r = 1$ et on posera $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$.

Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_A$-Module quasi-cohérent et $M = \Gamma(A,\mathcal{M})$. On a alors

$$\Gamma(A \times_k A^\vee, \sharp pr^* \mathcal{M}) = M \otimes_k k[y]$$

en tant que $k[x,y]$ module et ($k[x,y]$-module et)

$$\partial_x.(m \otimes P(y)) = (\partial_x.m) \otimes P(y) ,$$

$$\partial_y.(m \otimes P(y)) = m \otimes P'(y) ;$$

on a de même

$$\Gamma(A \times_k A^\vee, \sharp \langle , \rangle^* \mathcal{L}) = k[x,y]$$

en tant que $k[x,y]$-module et

$$\partial_x.P(x,y) = P'_x(x,y) - yP(x,y) ,$$

$$\partial_y.P(x,y) = P'_y(x,y) - xP(x,y) ;$$

par suite

$$\Gamma(A \times_k A^\vee, \sharp pr^* \mathcal{M} \overset{\sharp}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A \times_k A^\vee}} \sharp \langle , \rangle^* \mathcal{L}) = M \otimes_k k[y]$$

en tant que $k[x,y]$-module et

$$\partial_x.(m \otimes P(y)) = (\partial_x.m) \otimes P(y) - m \otimes (yP(y))$$

$$\partial_y.(m \otimes P(y)) = m \otimes P'(y) - (x.m) \otimes P(y)$$

enfin, on obtient que

$$\Gamma(A^\vee, \int_{pr^\vee}(\sharp pr^* \mathcal{M} \overset{\sharp}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A \times_k A^\vee}} \sharp \langle , \rangle^* \mathcal{L}))$$

$$= [M \otimes_k k[y] \xrightarrow{\partial_x} M \otimes_k k[y]]$$

(complexe concentré en degré -1 et 0) dans $D^b(k[y,\partial_y])$. Il ne reste plus qu'à remarquer que la suite de k-vectoriels

$$0 \longrightarrow M\otimes_k k[y] \xrightarrow{\partial_x} M\otimes_k k[y] \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\sum_{i\geqslant 0} m_i y^i \longmapsto \sum_{i\geqslant 0} \partial_x^i m_i$$

est exacte et que la multiplication par y (resp. ∂_y) sur $[M\otimes_k k[y] \xrightarrow{\partial_x} M\otimes_k k[y]]$ induit la multiplication par ∂_x (resp. $-x$) sur M .

7.3.2. Théorème de semi-continuité pour l'irrégularité (conjecture).

Soient S un schéma séparé, de type fini et lisse sur un corps k de caractéristique zéro, et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé, de type fini et lisse, purement de dimension relative 1 , et $\sigma : S \longrightarrow X$ une section de $f : X \longrightarrow S$; on posera $Y = \sigma(S)$ et $U = X-Y \xhookrightarrow{j} X$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_U$-Module localement libre de rang fini constant, muni d'une connexion intégrable, qui en fait donc un $\mathcal{D}_U$-Module (à gauche) holonome ; alors $j_*\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-Module holonome (cf. [3] 3.2 ou [4] ch. 3, 2.11).

Pour tout point $s \in S$, soit $\mathcal{M}|U_s$ le $\mathcal{O}_{U_s}$-Module à connexion restreint à U_s et soit

$$\varphi : S \longrightarrow \mathbb{Z}$$

la fonction définie par

$$\varphi(s) = i_{\sigma(s)}(\mathcal{M}|U_s)$$

(cf. [ ] 6.20 pour la définition de l'irrégularité $i_x(-)$).

Deligne a démontré (non publié) que φ est une fonction constructible et semi-continue inférieurement (cf. [12] 2.1.1 (i)).

Par analogie avec [12] 2.1.1 (ii), nous conjecturons :

CONJECTURE 7.3.2.1. Si la fonction φ est localement constante sur S , la variété caractéristique de $j_*\mathcal{M}$ est contenue dans $T^*_X X \cup T^*_Y X$.

Remarques 7.3.2.2 (i) Si l'on suppose f de plus propre, le fait que

$$|Car(j_*\mathcal{M})| \subset T^*_X X \cup T^*_Y X$$

implique que les faisceaux de cohomologie de

$$\int_f j_* \mathcal{M} = \int_{f|_U} \mathcal{M}$$

sont des $\mathcal{D}_S$-Modules holonomes, localement libres de rang fini en tant que $\mathcal{O}_S$-Modules i.e. tels que

$$|\mathrm{Car}(\int^n_{f|_U} \mathcal{M})| \subset T^*_S S \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(cf. [7] III B et [12] 2.1.2).

(ii) Si S est une courbe et si $s \in S$ est tel que

$$\mathrm{Car}(j_* \mathcal{M}) = m_o[T^*_X X] + m_1[T^*_Y X] + m_2[T^*_{\sigma(s)} X]$$

on peut même conjecturer que m_2 est le "saut" de la fonction φ en s (cf. [12] 5.1.1).

Bibliographie

[1] A.A. BEILINSON, I.N. BERNSTEIN, P. DELIGNE et O. GABBER.- Faisceaux pervers, Conférence de Luminy, juillet 1981, "Analyse et Topologie sur les espaces singuliers", à paraître dans la collection Astérisque.

[2] I.N. BERNSTEIN.- Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients, Funct. Anal. Akad. Nauk. CCCR 5 (1971) p. 1-16.

[3] I.N. BERNSTEIN.- The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Funct. Anal. Akad. Nauk. CCCR 6 (1972), p. 26-40.

[4] J.E. BJÖRK.- Rings of Differential Operators, North-Holland (1979).

[5] J.L. BRYLINSKI.- Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques, preprint de l'Ecole Polytechnique (1983).

[6] J.L. BRYLINSKI.- (Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki (février 1982).

[7] J.L. BRYLINSKI, A.S. DUBSON et M. KASHIWARA.- Formule de l'indice pour les Modules holonomes et obstruction d'Euler locale, Note au C.R.A.S., t. 293 (30-11-1981) p. 573-576.

[8] P. DELIGNE.- La conjecture de Weil II, Publ. Math. IHES n° 52 (1980) p. 313-428.

[9] P. DELIGNE.- Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag (1970).

[10] H. HIRONAKA.- Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zéro, I et II, Annals of Math. 79 (1964), p. 109-326.

[11] N.M. KATZ.- Sommes exponentielles, Cours à Orsay, automne 1979, Astérisque 79 (1980).

[12] G. LAUMON.- Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après Deligne), dans Caractéristique d'Euler-Poincaré, Séminaire ENS 1978-79, Astérisque 82-83 (1981), p. 173-219.

[13] G. LAUMON.- Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique, Note aux C.R.A.S., t. 292 (19-1-1981), p. 209-212.

[14] G. LAUMON.- Majoration de sommes exponentielles attachées aux hypersurfaces diagonales, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. (1983), p.

[15] M. RAYNAUD.- Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki 1964/65, n° 286.

[16] J.P. SERRE.- Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag (1964).

[17] J.P. SERRE.- Majoration de sommes exponentielles, Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42 (1977), p. 111-126.

Sigles

[SGA 1] Revêtements étales et groupe fondamental, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag (1971).

[SGA 4] Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, Lecture Notes in Math. 269, 270 et 305, Springer-Verlag (1972-1973).

[SGA 4½] Cohomologie étale, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag (1977).

[SGA 7] Groupe de monodromie en géométrie algébrique, Lecture Notes in Math. 288 et 340, Springer-Verlag (1972-73).

Pour une bibliographie plus complète sur les sommes trigonométriques, on pourra consulter celle de [11].

N.M. Katz
Princeton University
Department of Mathematics
Fine Hall, Box 37
Princeton, New Jersey 08544
U.S.A.

G. Laumon
Université Paris XI
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay cédex
France

N° d'impression 606

2ème trimestre 1983

LAUMON Gérard

CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ
ET SOMMES EXPONENTIELLES

RESUMÉ :

Les articles réunis dans cette thèse étudient certains aspects de la ramification des faisceaux constructibles sur les variétés algébriques, en liaison avec des calculs de caractéristiques d'Euler-Poincaré et d'estimations de sommes trigonométriques. Nous travaillons d'une part en caractéristique $p \neq 0$, avec des faisceaux ℓ-adiques et d'autre part en caractéristique nulle, avec des $\mathcal{D}$-Modules.

MOTS CLÉS : cohomologie étale, ramification (des faisceaux), Euler-Poincaré (caractéristiques d'), sommes exponentielles, Fourier (transformation de), $\mathcal{D}$-Modules, catégorie dérivée filtrée.